ORSAY
Série A, N°
N° d'ordre
272

Inscrit aux archives originales
du Centre de Documentation
C.N.R.S. sous le N° AO-1621

THESES

présentées

à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

pour obtenir

le titre de DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Alexandre ANDREEWSKY

Première thèse

ETUDE DE L'INTERACTION NON LINEAIRE DES ONDES DANS UN PLASMA HOMOGENE NON ISOTROPE.

Deuxième thèse

HOLOGRAMMES : PRINCIPE ET APPLICATIONS.

Soutenues le 22 Juin 1967 devant la Commission d'Examen : Professeur J.L. DESTOUCHES Président
Professeur J.L. DELCROIX Directeur de Thèse
Docteur MANGENEY Rapporteur

Le présent travail a été effectué au Département de Physique du Plasma et de la Fusion Contrôlée du Commissariat à l'Energie Atomique .

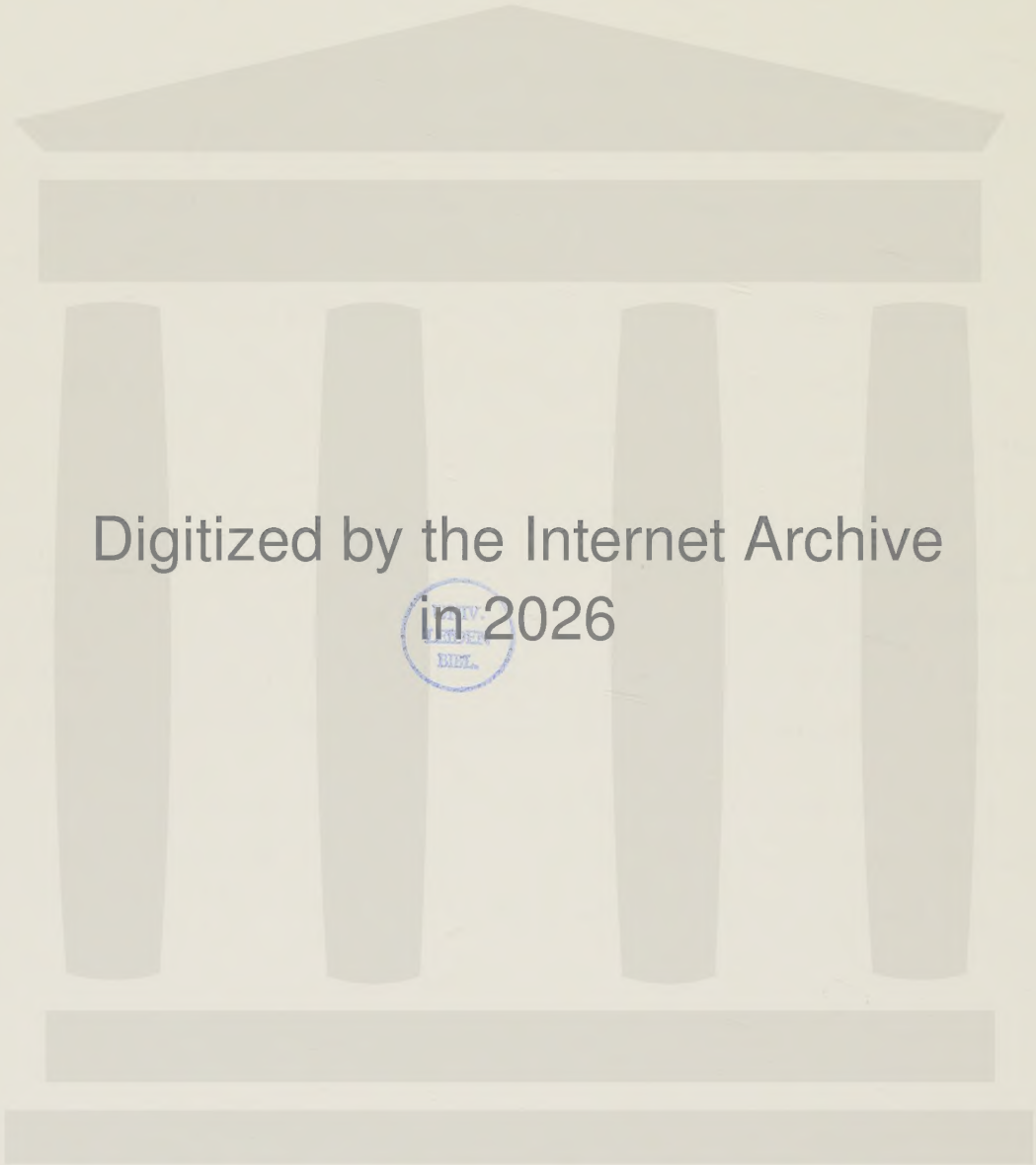
Je remercie Monsieur le Professeur DESTOUCHES et Monsieur le Professeur DELCROIX pour les critiques et l'attention qu'ils ont portées à ce travail et pour avoir accepté de faire partie de mon Jury.

Je remercie Monsieur MANGENEY pour l'intérêt porté au travail et pour avoir accepté de faire partie de mon Jury .

J'exprime ma reconnaissance à mes Collègues de la Section de Théorie des Gaz Ionisés et plus particulièrement à Monsieur FIDONE pour l'aide constante apportée et les critiques qu'il m'a faites , ainsi qu'à Madame Simonne LAFLEUR, Messieurs PELLAT, LAVAL et LAFLEUR pour les très nombreuses discussions, encouragements et idées qu'ils m'ont apportés.

Enfin , je remercie Monsieur KOVRIJNIKH , stagiaire de recherche en 1964 à Fontenay-aux-Roses , pour m'avoir donné l'idée de ce travail et pour les nombreux conseils prodigués au début du travail.

Digitized by the Internet Archive
in 2026



https://archive.org/details/IA41534914_0012

RESUME DE LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée par Monsieur ANDREEWSKY Alexandre
Licencié ès-sciences physiques

Thèse préparée au Département de Physique du Plasma et de la Fusion Contrôlée - Centre d'Etudes Nucléaires de Fontenay-aux-Roses, sous la direction de Monsieur le Professeur J.L. DELCROIX

ETUDE DE L'INTERACTION NON LINEAIRE D'ONDES DANS UN PLASMA HOMOGENE NON ISOTROPE

Le présent travail est consacré à l'étude de la théorie non linéaire de l'interaction des ondes d'un plasma anisotrope où l'anisotropie est due à un champ magnétique constant. Pour cela on se sert d'un plasma défini par l'équation de Vlassov :

$$\frac{\partial f_q}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_q}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m_q}\left[\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{B}\right]\frac{\partial f_q}{\partial \vec{v}} + \frac{q}{m_q c}\vec{v}\wedge\vec{B}_0\,\frac{\partial f_q}{\partial \vec{v}} = 0$$

f fonction de distribution des particules, $\vec{r}$ vecteur de coordonnée d'espace libre, $\vec{v}$ vecteur vitesse, m_q masse des particules d'espèce (q désignant aussi bien la charge que l'espèce). B_0 est un champ magnétique extérieur. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs du plasma vérifiant les équations de Maxwell :

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{J}(E) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_{ex} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho(E) + 4\pi\rho_{ex} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\vec{J} = \sum_q q\int \vec{v} f_q\, d^3\vec{v} \qquad \rho = \sum_q q\int f_q(\vec{r},\vec{v},t)\, d^3\vec{v}$$

$$\text{avec } d^3\vec{v} = dv_x\, dv_y\, dv_z$$

On montre ensuite que pour décrire les phénomènes faiblement non linéaires il est possible d'utiliser le paramètre $\varepsilon^2 = \int \langle E^2_{k\omega}\rangle\, d\omega\, d\vec{k}$ (où $\langle\ \rangle$ désigne la moyenne d'ensemble), lorsqu'est vérifiée la condition $\frac{\langle E^2\rangle_T}{nT} \ll \frac{\varepsilon^2}{nT} \ll 1$

où n est la densité numérique des particules et T leur température

En prenant certaines précautions mathématiques on obtient alors, à partir des équations de Maxwell, l'équation :

$$\frac{1}{4\pi}\int d\omega\, d\vec{\kappa}\ \frac{\partial \langle EE^+\rangle_{\kappa\omega}}{\partial \tau}\left\{\frac{\partial \omega\, \varepsilon'_{ij}}{\partial \omega}+\frac{c^2\kappa^2}{\omega^2}\left(\frac{\kappa_i\kappa_j}{\kappa^2}-\delta_{ij}\right)\right\}\tau^i_\kappa\,\tau^i_{-\kappa}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int d\omega\, d\vec{\kappa}\ \frac{\partial \omega\,\varepsilon'_{ij}}{\partial \vec{\kappa}}\ \frac{\partial \langle EE^+\rangle_{\kappa\omega}}{\partial \vec{r}}\ \tau^i_\kappa\,\tau^j_{-\kappa}\quad+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int d\vec{\kappa}\, d\omega\ \sigma'_{ij}\langle EE^+\rangle_{\kappa\omega}\,\tau^i_\kappa\,\tau^j_{-\kappa} = -\varepsilon\langle \vec{E}\cdot(\vec{J}_2(E)+\varepsilon\vec{J}_3(E)+\cdots)\rangle$$

(cas non homgène)

Au moyen de l'équation de Vlassov perturbée, en posant $f = f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+\cdots$ on calcule $J_2(E)$. Ensuite, en posant $E=\varepsilon E_0+\varepsilon^2 E_1+\cdots$ on arrive à l'équation d'évolution de $\langle EE^+\rangle_{\kappa\omega}$ qui s'écrit :

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\partial \omega\,\varepsilon'_{ij}}{\partial\omega}+\frac{c^2\kappa^2}{\omega^2}\left(\frac{\kappa_i\kappa_j}{\kappa^2}-\delta_{ij}\right)\right\}\tau^i_\kappa\,\tau^j_{-\kappa}\ \frac{\partial\langle E^2\rangle_{\kappa\omega}}{\partial t}\ +\ \sigma_{ij}\,\tau^i_\kappa\,\tau^j_{-\kappa}\langle E^2\rangle_{\kappa\omega} =$$

$$\int d\vec{\kappa}_2 d\vec{\kappa}_1 d\omega_2 d\omega_1\left(\sigma^{i'j'}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\right)^i\left(\pi^{-1}_{\kappa_2 j''}\right)\cdot\sigma^{i''j}_{\kappa_2-\kappa_1,\kappa j''}\cdot\tau_{\kappa_1 i'}\tau_{-\kappa_1 i''}\tau_{\kappa j}\tau_{-\kappa i}\,\delta(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}_1-\vec{\kappa}_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)+$$

$$+\int d\vec{\kappa}_2 d\vec{\kappa}_1 d\omega_2 d\omega_1\left(\sigma^{i'j'}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\right)^i\left(\pi^{-1}_{-\kappa\, i}{}^{j}\right)\cdot\sigma^{i''j''}_{-\kappa-\kappa_1-\kappa_2 j}\cdot\tau_{\kappa_1 i'}\tau_{-\kappa_1 i''}\tau_{\kappa_2 j'}\tau_{-\kappa_2 j''}\,\delta(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}_1-\vec{\kappa}_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)+$$

$$+\int d\vec{\kappa}_2 d\vec{\kappa}_1 d\omega_2 d\omega_1\left(\sigma^{i'j'}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\right)^i\left(\pi^{-1}_{\kappa_1 j''}\right)\cdot\sigma^{i''j}_{\kappa_1-\kappa_2\,\kappa j''}\cdot\tau_{\kappa_2 i''}\tau_{-\kappa_2 j}\tau_{\kappa i'}\tau_{-\kappa i}\,\delta(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}_1-\vec{\kappa}_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)$$

$\sigma^{ij}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ a été calculé dans le cas général, mais se présente sous une forme compliquée.

Dans le cas d'un champ magnétique fort $i=j=3$ et :

$$\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}=\frac{e^3}{mT}\frac{\beta}{\kappa_2\kappa}\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\omega_2^2 m}{\kappa_2^2 T}-1\right)+\frac{m}{T}\frac{1}{2\alpha^{3/2}}+\left(1-\frac{m\omega_2^2}{\kappa_2^2 T}\right)2\frac{\omega_2}{\kappa_2}e^{-\alpha\frac{\omega_2^2}{\kappa_2^2}}\left(\int_0^{\frac{\omega_2}{\kappa_2}\sqrt{\alpha}}e^{t^2}dt\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\omega^2 m}{\kappa^2 T}-T\right)+\frac{m}{T2\alpha^{3/2}}+\left(1-\frac{m\omega^2}{\kappa^2 T}\right)2e^{-\alpha\omega^2/\kappa^2}\frac{\omega}{\kappa}\left(\int_0^{\omega/\kappa\cdot\sqrt{\alpha}}e^{t^2}dt\right)\right]\frac{1}{\frac{\omega}{\kappa}-\frac{\omega_2}{\kappa_2}}\ +$$

$$+\frac{\kappa}{\kappa_2}\frac{\omega}{\kappa\left(\frac{\omega}{\kappa}-\frac{\omega_2}{\kappa_2}\right)^2}\left[-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{2\omega}{\kappa}e^{-\alpha\frac{\omega^2}{\kappa^2}}\left(\int_0^{\frac{\omega}{\kappa}\sqrt{\alpha}}e^{t^2}dt\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{\kappa}{\kappa_2}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\kappa}-\frac{\omega_2}{\kappa_2}\right)^2}\left[\frac{\omega}{\kappa\sqrt{\alpha}}+2e^{-\frac{\omega_2^2}{\kappa_2^2}}\left(\int_0^{\frac{\omega_2}{\kappa_2}\sqrt{\alpha}}e^{t^2}dt\right)\left(\frac{\omega_2^2}{\kappa_2^2}-2\frac{\omega_2}{\kappa_2}\frac{\omega}{\kappa}-2\frac{\omega_2^3}{\kappa_2^3}\frac{\omega}{\kappa}\alpha+2\frac{\omega_2^4}{\kappa_2^4}\alpha\right)+2\left(\frac{\omega_2^2}{\kappa_2^2}\frac{\omega}{\kappa}-\frac{\omega_2^3}{\kappa_2^3}\right)\right]\right.$$

avec $\kappa=\kappa_{11}$ $\quad\kappa_2=(\kappa_{11})_2$ $\quad\alpha=\frac{m}{2T}$ $\quad\beta=\frac{n}{(2\pi\alpha)^{3/2}}$

Toujours dans le cas d'un champ magnétique infini, l'expression des coefficients de corrélation des ondes s'écrit :

$$V(k^-, k_1^-, k_2^-) = \delta(\omega^- - \omega_1^- - \omega_2^-)\,\delta(k^- - k_1^- - k_2^-)\,\left(\sigma^{33}_{k^- k_1^- k_2^-}\right)^2 \frac{\Omega^2\omega^2 \sin^4\theta}{(\Omega^2\omega^2\theta - \omega^2)^2} \cdot \frac{\eta^2\theta_1 \cdot \eta^2\theta_2}{\left\{\eta^2\theta_1 + (1-\frac{\Omega^2}{\omega_1^2})^2\right\}\left\{\eta^2\theta_2 + (1-\frac{\Omega^2}{\omega_2^2})^2\right\}}$$

$$\cdot \frac{|(\Omega^2\omega^2\theta_1 - \omega_1^2)|\,|(\Omega^2\omega^2\theta_2 - \omega_2^2)|}{\Omega^2\sin^2\theta_1\,\Omega^2\sin^2\theta_2\left[\frac{2\Omega^2}{\omega_1^3} - \frac{4\Omega^2}{\omega_1^3}(\eta_1^{-2})\omega^2\theta_1 + \frac{2(\eta_1^-)^2}{\omega_1}\right]\left[\frac{2\Omega^2}{\omega_2^3} - \frac{4\Omega^2}{\omega_2^3}(\eta_2^-)^2\omega^2\theta_2 + 2\frac{(\eta_2^-)^2}{\omega_2}\right]}$$

$$V(k^-, k_1^+, k_2^-) = \delta(\omega^- - \omega_1^+ - \omega_2^-)\,\delta(k^- - k_1^+ - k_2^-)\,\left(\sigma^{33}_{k^- k_1^+ k_2^-}\right)^2 \frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\omega^2\theta - \omega^2)^2} \frac{\omega_1^3\,\eta^2\theta_2}{\left\{\eta^2\theta_2 + (1-\frac{\Omega^2}{\omega_2^2})^2\right\}2\Omega^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{|(\Omega^2\omega^2\theta_2 - \omega_2^2)|}{\Omega^2\sin^2\theta_2\left[\frac{2\Omega^2}{\omega_2^3} - \frac{4\Omega^2}{\omega_2^3}(\eta_2^-)^2\omega^2\theta_2 + \frac{2(\eta_2^-)^2}{\omega_2}\right]}$$

$$V(k^-, k_1^-, k_2^+) = \delta(\omega^- - \omega_1^- - \omega_2^+)\,\delta(k^- - k_1^- - k_2^+)\,\left(\sigma^{33}_{k^- k_1^- k_2^+}\right)^2 \frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\omega^2\theta - \omega^2)^2} \frac{\omega_2^3\,\eta^2\theta_1}{\left\{\eta^2\theta_1 + (1-\frac{\Omega^2}{\omega_1^2})^2\right\}2\Omega^2}$$

$$\cdot \frac{|(\Omega^2\omega^2\theta_1 - \omega_1^2)^2|}{\Omega^2\sin^2\theta_1\left[\frac{2\Omega^2}{\omega_1^3} - \frac{2\Omega^2}{\omega_1^3}(\eta_1^-)^2\omega^2\theta_1 + 2\frac{(\eta_1^-)^2}{\omega_2}\right]}$$

$$V(k^-, k_1^+, k_2^+) = \delta(\omega^-, \omega_1^+, \omega_2^+)\,\delta(k^-, k_1^+, k_2^+)\,\left(\sigma^{33}_{k^- k_1^+ k_2^+}\right)^2 \frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\omega^2\theta - \omega^2)^2} \frac{\omega_1^3}{2\Omega^2}\frac{\omega_2^3}{2\Omega^2}$$

avec $(\eta^-)^2 = \dfrac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2\omega^2\theta}$ $\qquad (\eta^+)^2 = 1$

$\eta = \dfrac{kc}{\omega}$ $\qquad \Omega$ fréquence plasma. $\qquad \left(\theta = (\vec{k}, \vec{B}_0)\right)$

Nous avons illustré sur l'exemple d'un champ magnétique fort le problème de la sélection des ondes et le calcul des corrélations d'interaction. Ce calcul a été fait de façon suffisamment détaillée pour, le cas échéant, procéder à une vérification expérimentale.

Pour finir disons que les conditions physiques de validité de notre théorie peuvent se résumer de la façon suivante :

1) la densité d'énergie du bruit doit être grande par rapport à sa valeur à l'équilibre thermodynamique, mais inférieure à la densité d'énergie cinétique des particules ;

2) que les ondes doivent être faiblement amorties ou faiblement croissantes $\gamma \ll \omega$ (γ taux d'amortissement, ω fréquence de l'onde) ;

3) que le modèle de plasma est défini par l'équation de Vlassov ;

4) qu'il y a stationnarité des champs électriques par rapport à la variation rapide de ces champs dans le temps.

TABLE DES MATIERES

pages

1 - Introduction 6

2 - Calcul des différents ordres du courant (plasma anisotrope avec anisotropie due à un champ magnétique constant B_o) 15

A - Transformée de Fourier des équations de la chaîne et étude des solutions 15

B - Calcul explicite de la fonction de distribution du premier ordre 17

C - Calcul explicite de la fonction de distribution du deuxième ordre 19

D - Calcul du courant du deuxième ordre et expression de la conductibilité non linéaire $\sigma^{ij}_{\kappa\,\kappa_1,\kappa_2}$ 22

3 - Etude de l'ordre des différents termes de l'équation fondamentale et expression de cette équation 27

4 - Etude du problème de la sélection des ondes dans le cas d'un champ magnétique B_o constant 35

5 - Etude du problème de la sélection pour B_o grand 37

6 - Etude de la probabilité de dislocation pour B_o grand 41

A - Calcul des vecteurs de polarisation 42

B - Expression des champs en fonction des courants du deuxième ordre 42

C - Etude de l'existence possible des différentes formes d'interaction en fonction de la nature de l'équation de dispersion 43

D - Expression des probabilités de dislocation 45

E - Expression de $\sigma^{ij}_{\kappa\,\kappa_1,\kappa_2}$ pour B_o grand 46

F - Discussion 47

- Intéraction longitudinale - longitudinale (par rapport au champ magnétique) 47

- Interaction transversale - transversale 47

- Interaction longitudinale - transversale 49

7 - Conclusion 51

Appendice I - Calcul de $\mathcal{P}\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ 52

Appendice II - Dimension des principales grandeurs utilisées 53

Appendice III - Expression classique de J_1 54

Appendice IV - Etude de la méthode d'itération utilisée 55

Appendice V - Remarques à propos des ondes longitudinales obliques 55

Bibliographie 56

INTRODUCTION.

La théorie de l'interaction non linéaire d'ondes dans les plasmas a fait l'objet déjà de plusieurs travaux assez importants au cours des trois dernières années [1,2...22]. Les difficultés essentielles rencontrées dans toutes ces théories viennent principalement de la longueur considérable des calculs, ce qui rend difficile leur utilisation dans des buts pratiques.

Il existe plusieurs types de méthodes permettant d'aborder les problèmes non-linéaires. D'une part, on trouve les méthode utilisées principalement dans les travaux de l'Institut Lebedev (Tsitovitch Kovrijnikh et all [1,2...5]) où l'on fait appel à un modèle de plasma semi-quantique pour déduire des équations d'évolution du nombre d'onde et de la fonction de distribution des particules. Dans un premier travail (1965 [12]) nous avons utilisé ce type de méthode. D'autre part , Karpman [6] (1963) et Silin (1964) [8] utilisent un modèle de plasma défini par l'équation de Vlassov (non linéarisée). Dans le présent travail nous avons choisi cette dernière méthode étant donné que pour l'étude que nous nous proposons de faire elle est un peu plus courte.

La plupart des travaux effectués jusqu'à présent ont été consacré à l'étude des cas d'interaction d'ondes électrostatiques.

Les premiers travaux consacrés à l'étude du cas d'un plasma anisotrope homogène ont été publiés en 1964-1965 simultanément par plusieurs auteurs (Poustovalov et Kropotkine [11], Gaïlitis - Tsitovitch [2] et nous-mêmes [12].

§ 1 - Le présent travail est donc consacré à l'étude de la théorie non linéaire de l'interaction des ondes d'un plasma anisotrope, où l'anisotropie est due à un champ magnétique constant. Pour cela nous nous servons d'un modèle de plasma défini par l'équation de Vlasov.

Cette équation, à laquelle on peut parvenir aux moyens des équations de la hiérarchie B.B.G.K.Y., s'écrit :

$$\frac{\partial f_q}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial f_q}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m_q}\left[\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{v}\wedge\vec{B}\right]\frac{\partial f_q}{\partial \vec{v}} + \frac{q}{m_q c}\,\vec{v}\wedge\vec{B}_0\,\frac{\partial f_q}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad (1)$$

f fonction de distribution des particules ; r vecteur coordonnée d'espace libre ; v vecteur vitesse ; m masse des particules d'espèce q ; q désigne aussi bien la charge que l'espèce des particules ; B_0 est le champ magnétique extérieur. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs du plasma vérifiant les équations de Maxwell.

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{J}(E) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_{ex} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho(E) + 4\pi\rho_{ex} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{J} = \sum_q q\int \vec{v}\, f_q(\vec{v},\vec{r},t)\,d^3\vec{v} \qquad \rho = \sum_q q\int f(\vec{r},\vec{v},t)\,d^3\vec{v}$$

où $d^3\vec{v} = dv_x\,dv_y\,dv_z$

et f est normalisée à la densité numérique des particules.

Pour toutes les grandeurs stationnaires dans le temps et homogènes dans l'espace, nous utiliserons la transformée de Fourier - Laplace qui s'écrit pour les champs électriques :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{\kappa}\, e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} \int d\omega\, e^{-i\omega t}\, \vec{E}(\vec{\kappa},\omega)$$

$$\vec{E}(\vec{\kappa},\omega) = \int d\vec{r}\, e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} \int dt\, e^{i\omega t}\, \vec{E}(\vec{r},t) \qquad \mathrm{Im}\,\omega = \sigma \geq 0 \tag{3}$$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$i\,\vec{\kappa}\wedge\vec{B}(\vec{\kappa},\omega) + \frac{i\omega}{c}\vec{E}(\vec{\kappa},\omega) - \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{\kappa},\omega) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_{ex}(\kappa,\omega)$$

$$i\,\vec{\kappa}\wedge\vec{E} - \frac{i\omega}{c}\vec{B}_{\kappa\omega} = 0 \qquad \vec{\kappa}\cdot\vec{B} = 0 \tag{4}$$

$$i\,\vec{\kappa}\cdot\vec{E} = \sum_q 4\pi q \int f(\vec{\kappa},\omega,\vec{v})\, d^3\vec{v} \qquad \vec{J}(\vec{\kappa},\omega) = q\int \vec{v} f_q(\vec{\kappa},\vec{v},\omega)\, d^3\vec{v}$$

$$\rho(\kappa,\omega) = \sum_q q \int f_q(\vec{\kappa},\vec{v},\omega)\, d^3\vec{v}$$

Si on suppose la loi entre J et E linéaire, on aura alors :

$$\left(K^2\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right)E_j = \frac{4\pi i\omega}{c^2} J_{i\,ex} \qquad \text{(sommation sur J)} \tag{5}$$

où on a supposé que :

$$J_i(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int \sigma_{ij}(\vec{r}-\vec{r}', t-t')\, E_j(\vec{r}',t')\, d\vec{r}' \tag{6}$$

et donc :

$$J_i(\vec{\kappa},\omega) = \sigma_{ij}(\vec{\kappa},\omega)\, E_j(\vec{\kappa},\omega) \tag{7}$$

avec :

$$\sigma_{ij} = \int_0^{\infty} d\tau \int \sigma_{ij}(\vec{R},\tau)\, e^{-i(\vec{\kappa}\cdot\vec{R} - \omega\tau)}\, d\vec{R} \tag{8}$$

où on a posé :

$$\tau = t - t' \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \qquad \varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij} \tag{9}$$

En multipliant scalairement la première équation de Maxwell par $\vec{E}$ et la seconde par $\vec{B}$, puis en additionnant, on trouve une des expressions de la conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\frac{\partial E^2 + B^2}{\partial t} + \frac{c}{4\pi}\, \mathrm{div}\, \vec{E}\wedge\vec{B} + \vec{J}(\vec{E})\cdot\vec{E} = -\vec{J}_{ex}\cdot\vec{E} \tag{10}$$

Il est très important de noter que dans cette équation la dépendance de J en fonction de E n'est pas supposée linéaire.

Dans tout ce qui suivra nous aurons besoin de corrélations moyennes que nous définirons de la façon suivante : soit $\vec{r}$ un vecteur coordonnée d'espace libre, soit $\vec{r}_i$ le vecteur espace lié à la particule i, $\vec{r}_{io}$ sa valeur initiale ; soit $\vec{v}$ le vecteur vitesse libre, $\vec{v}_i$ le vecteur vitesse lié à la particule i, $\vec{v}_{io}$ sa valeur initiale ; soit une grandeur $\vec{A}(r, v, t)$ macroscopique somme de ses définitions microscopiques (cela peut être aussi bien la densité, l'énergie cinétique, les champs, les courants, etc...)

$$\vec{A}(\vec{r},\vec{v},t) = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{A}\left(\vec{r}, \vec{r}_i(\vec{r}_{1o}\dots\vec{r}_{No},\vec{v}_{1o}\dots\vec{v}_{No},t), \vec{v}_i(\vec{r}_{1o}\dots\vec{r}_{No},\vec{v}_{1o}\dots\vec{v}_{No},t)\right)$$

$$\text{On a } \vec{A}(r, v, t) = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{A}\left(\vec{r}, \vec{r}_i(\vec{r}_{1o}\dots\vec{r}_{No},\vec{v}_{1o}\dots\vec{v}_{No},t), \vec{v}_i(\vec{r}_{1o}\dots\vec{r}_{No},\vec{v}_{1o}\dots\vec{v}_{No},t)\right) \qquad (11)$$

soit encore une autre grandeur $B(r, v, t)$ du même type.

On posera :

$$\langle A_\alpha(\vec{r},\vec{v},t) B_\beta(\vec{r}',\vec{v}',t')\rangle = \frac{1}{\int D_o(\vec{r}_{1o}\dots\vec{r}_{No},\vec{v}_{1o}\dots\vec{v}_{No})\, d\tau} \int_{\vec{r}}^{N}\int_{\vec{v}}^{N}\left[\sum_{i=1}^{i=N}\sum_{i=1}^{i=N} A_\alpha(\vec{r},\vec{r}_i,\vec{v}_i,t) B_\beta(\vec{r}',\vec{r}_i,\vec{v}_i,t')\right] D_o\, d\tau \qquad (12)$$

où $d\tau = d\vec{r}_{1o}\dots d\vec{r}_{No}\, d\vec{v}_{1o}\dots d\vec{v}_{No}$, D_o désignant la fonction de distribution relative aux conditions initiales et peut être aussi bien celle de l'équilibre qu'une toute autre fonction. $\vec{r}_i$ et $\vec{v}_i$ dépendent de toutes les conditions initiales des N particules. α et β sont les indices des coordonnées.

En milieu homogène $\vec{r}$ ne joue aucun rôle privilégié par rapport à $\vec{r}'$ et par conséquent il y a symétrie de l'expression de $\langle A_\alpha B_\beta\rangle$ par rapport à $\vec{r}$ et $\vec{r}'$, ce qui signifie qu'elle ne peut dépendre que de $\vec{r}-\vec{r}'$. De même, en milieu stationnaire elle ne dépendra que de $t - t'$.

Nous allons maintenant précision les conditions physiques de notre problèpe. Rappelons pour cela auparavent un certain nombre de faits de la théorie linéaire des fluctuations pour le cas simple d'un plasma isotrope.

Dans ce cas, le tenseur (9) s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_\perp\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) + \varepsilon_{//}\frac{k_i k_j}{k^2} \qquad (13)$$

où le vecteur $\vec{K}$ est dirigé suivant oz. (Les indices // et $\perp$ désignent les composantes parallèles au vecteur d'onde $\vec{K}$ et perpendiculaire à $\vec{K}$).

A partir du moment où on désire mettre en évidence les énergies des fluctuations dues à des courants microscopiques, on doit introduire dans les équations de Maxwell des courants microscopiques qui figurent comme courants extérieurs. Alors l'equation (5) nous permet d'écrire :

$$\vec{E}_{//} = -\frac{4\pi i}{\omega\,\varepsilon_{//}}\vec{J}_{//}(\vec{K},\omega)_{ex} \qquad \text{et} \qquad \vec{E}_\perp = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\,\frac{\vec{J}_\perp(\vec{K},\omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp} \qquad (14)$$

Comme $\langle E^2\rangle_{K\omega} = \langle E_{//}^2\rangle_{K\omega} + \langle E_\perp^2\rangle_{K\omega}$ il nous suffit de connaître $\langle E_{//}^2\rangle$ et $\langle E_\perp^2\rangle$

On a alors :

$$\langle E_{\parallel}^2 \rangle_{\kappa\omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \frac{G_{\parallel}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} \qquad \text{et} \quad \langle E_{\perp}^2 \rangle_{\kappa\omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} 2 \frac{G_{\perp}}{\left|\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{\perp}\right|^2} \tag{15}$$

$$\text{avec} \quad \langle J_{\parallel}^2 \rangle_{\kappa\omega} = G_{\parallel} \qquad \text{et} \quad \langle J_{\perp}^2 \rangle_{\kappa\omega} = G_{\perp}$$

Le courant microscopique, ici, doit être pris en absence de champ extérieur, en absence de collision, et au premier ordre. On a donc :

$$\vec{J}(\vec{r},t) = e \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha} - \vec{v}_{\alpha} t) \qquad (\alpha = 1 \ldots N \text{ indice des particules}) \tag{16}$$

Par conséquent :

$$\langle J_i(\vec{r}',t') J_{\ell}(\vec{r}'',t'') \rangle = e^2 \int d\vec{r}_1 \ldots d\vec{r}_N \, d\vec{p}_1 \ldots d\vec{p}_N \, e^{-m\frac{v_1^2}{T}} \ldots e^{-m\frac{v_N^2}{T}} \sum_{\alpha} v_{\alpha}^i v_{\alpha}^{\ell} \, \delta(\vec{r}' - \vec{r}_{\alpha} - \vec{v}_{\alpha} t') \, \delta(\vec{r}'' - \vec{r}_{\alpha} - \vec{v}_{\alpha} t'')$$

$$= \frac{e^2}{\sqrt{\pi}} \int \vec{dp} \, e^{-\frac{mv^2}{T}} v^i v^{\ell} \, \delta(\vec{r} - \vec{v} t) \tag{17}$$

où on a posé $\qquad \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}'' \quad$ et $\quad t = t' - t''$

Par conséquent la transformée de Fourier de la corrélation spatiale et temporelle s'écrit :

$$\langle J_i \, J_{\ell} \rangle_{\kappa\omega} = \frac{e^2}{\sqrt{\pi}} \int d\vec{p} \, e^{-\frac{mv^2}{T}} v^i v^{\ell} \, \delta(\omega - \vec{\kappa}\vec{v}) \tag{18}$$

et donc on a :

$$\langle J_{\parallel}^2 \rangle_{\kappa\omega} = \frac{e^2}{\sqrt{\pi}} \int \vec{dp} \, e^{-\frac{mv^2}{T}} \left(\frac{\vec{\kappa}\vec{v}}{\kappa^2}\right)^2 \delta(\omega - \vec{\kappa}\vec{v}) \qquad \langle J_{\perp}^2 \rangle_{\kappa\omega} = \frac{e^2}{\sqrt{\pi}} \int \vec{dp} \, e^{-\frac{mv^2}{T}} \left[v^2 - \left(\frac{\vec{\kappa}\vec{v}}{\kappa^2}\right)^2\right] \delta(\omega - \vec{\kappa}\vec{v}) \tag{19}$$

Ceci nous permet, entre autres, d'obtenir les valeurs de $\langle E_{\parallel}^2 \rangle_{\kappa\omega}$ et de $\langle E_{\perp}^2 \rangle_{\kappa\omega}$. Si on tient compte de ce que :

$$Im\, \varepsilon_{\parallel} = \frac{(2\pi)^5}{T\omega} G_{\parallel}(\vec{\kappa},\omega) \qquad \text{et} \qquad Im\, \varepsilon_{\perp} = \frac{(2\pi)^5}{T\omega} G_{\perp}(\vec{\kappa},\omega) \tag{20}$$

on trouve tout d'abord :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle E_{\parallel}^2 \rangle_{\kappa\omega} \, d\omega = -\frac{T}{2\pi^3} \int \frac{d\omega}{\omega} Im \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} = \frac{T}{2\pi^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}(0,\kappa)}\right) \qquad \text{d'où } \langle E_{\parallel}^2 \rangle_{\nu} = \frac{T}{2\pi^2} \frac{1}{1+\kappa^2 d^2} \tag{21}$$

$$\text{où } \frac{1}{d^2} = \sum_i \frac{4\pi e_i^2 n_i}{T}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle E_{\perp}^2 \rangle_{\kappa\omega} \, d\omega = -\frac{T}{\pi^3} \int \frac{d\omega}{\omega} Im \frac{1}{\varepsilon_{\perp} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} = \frac{T}{\pi^2} \tag{22}$$

et enfin $\qquad \int_0^{K_d} \langle E^2 \rangle_{\kappa} \, d^3\vec{K} \simeq \frac{nT}{n_d}$

Remarque : Nous utilisons aussi bien la moyenne sur les conditions initiales que sur les phases initiales considérées comme décorrélées. Ceci est possible en première approximation.

Cette valeur du bruit est celle qui correspond à l'équilibre thermodynamique et toutes les ondes sont amorties par effet Landau. Mais lorsque les amplitudes sont d'un ordre de grandeur supérieur à celui de l'approximation linéaire, alors la valeur du bruit peut être supérieure à celle de sa valeur à l'équilibre thermodynamique dans le cas linéaire.

Si, donc, on prend comme paramètre de développement l'expression $\mathcal{E}^2 = \int \langle E^2_{\kappa\omega} \rangle \, d\omega \, d\vec{k}$ et que l'on pose les champs électriques et magnétiques du plasma proportionnels à $\mathcal{E}$; $E \sim \mathcal{E} E$, alors l'équation de Vlasov s'écrira :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} + (\vec{v} \wedge \vec{B}_0) \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} + \mathcal{E} \frac{q}{m_q} \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right] \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad (23)$$

et comme par cette équation on voit que f est fonction de E (lui même d'ailleurs fonction de f , on peut écrire : $f = f_0 + \mathcal{E} f_1 + \mathcal{E}^2 f_2 + \cdots$

Alors on peut dire :

1) que lorsqu'il y aura équilibre thermodynamique $\mathcal{E}^2$ aura sa plus petite valeur et dans la chaîne d'équations obtenues en remplaçant f par $f_0 + \mathcal{E} f_1 + \cdots$ dans (23), seule l'équation du premier ordre en E ne sera pas négligeable ;

2) si $\int \langle E^2_{\kappa\omega} \rangle \, d\omega \, d\vec{k}$ devient de l'ordre de nT on ne peut plus perturber par rapport à $\mathcal{E}$ et la théorie devient fortement non linéaire ;

3) si, enfin, $\frac{\langle E^2 \rangle_r}{nT} \ll \frac{\mathcal{E}^2}{nT} \ll 1$ alors nous nous trouvons dans un domaine intermédiaire où la perturbation est possible et où, en même temps, les phénomènes non linéaires sont sensibles. Cette condition est celle que l'on retrouve dans toutes les théories se rapportant aux études de la turbulence faible (1 ⇝ 22).

Dans l'étude que nous allons faire, les ondes seront traitées d'une façon cinétique. Pour cela nous devons obtenir la variation dans le temps de la corrélation spectrale $\langle E^2_{\kappa\omega} \rangle$ où $\vec{K}$ et ω doivent êtres reliés par la relation de dispersion du milieu. Cela découle du fait que l'on peut écrire

$$\int \langle E^2_{\kappa\omega} \rangle \, d\vec{\kappa} \, d\omega = \int \omega(\kappa) N(\kappa, \alpha^3 \kappa$$

où N_k est le nombre d'ondes par unité de volume

Il s'ensuit que la variation dans le temps de $\langle E^2 \rangle_{\kappa\omega}$ permet de connaître celle de N_k. Il nous faut donc établir une équation cinétique du type (24)

$$A_{\kappa\omega} \cdot \frac{\partial \langle E^2 \rangle_{\kappa\omega}}{\partial t} = F \left(\langle E^2 \rangle_{\kappa\omega} \right)$$

Il est évident que selon que les ondes seront stables ou non, le bilan du nombre d'ondes en sera modifié, étant donné que les ondes instables peuvent faire apparaître de grandes amplitudes et par conséquent des modifications de bilan dues aux interactions non linéaires.

Par conséquent, le terme $A_{\kappa\omega} \frac{\partial \langle E^2 \rangle_{\kappa\omega}}{\partial t}$ aura pour origine, d'une part la variation lente dans le temps de l'amplitude $E_{\kappa\omega}$, mais d'autre part il peut encore se produire des modifications de bilan dues aux interactions d'ondes stables de grande amplitude, et que l'on peut aussi observer sur les développements du courant par rapport au temps.

Afin de faire une étude qui du point de vue mathématique est correcte [illegible] certaines précautions imposées par le fait que lorsque l'on prend la transformée de Fourier d'une fonction E (r, t) dépendant du temps on trouve, comme cela est bien normal, une expression $\vec{E}(r,\omega)$ qui ne dépend plus du temps. (Notons à ce propos qu'il s'agit là d'un problème en général mal précisé, bien que très classique. Nous en donnons un exposé semblable à celui fait par Klimontovitch dans son livre "Théorie statistique des processus hors de l'état d'équilibre" mais ayant une forme plus mathématique.

Soit donc une fonction $E(t)$ quelconque du temps. Supposons qu'on puisse la représenter sous la forme d'une composition de plusieurs fonctions $E_1(t)$, $E_2(t)$, $E_3(t)$ ... etc.. à variations relatives plus ou moins rapides : $E(t) = E_1(t) \otimes E_2(t) \otimes E_3(t)$ ... Dans le cas qui nous intéresse la décomposition se mettra sous la forme de deux fonctions E_1 et E_2

$$E = E_1(t) \otimes E_2(t) \qquad (25)$$

et on doit avoir variation de $E_1(t) \ll$ variation de $E_2(t)$, ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} \left| E_1(t_k) - E_1(t_{k-1}) \right| \ll \sum_{k=1}^{n} \left| E_2(t_k) - E_2(t_{k-1}) \right| \qquad \{\forall t, \dots t_n\} \qquad (26)$$

Si les fonctions ont des dérivées et son développables en séries convergentes, la condition peut encore s'écrire en négligeant les termes supérieurs à 2 :

$$\sum_{k=1}^{n} \left| t_k - t_{k-1} \right| \frac{\partial E_1(t_k)}{\partial t} \ll \sum_{k=1}^{n} \left| t_k - t_{k-1} \right| \frac{\partial E_2(t_k)}{\partial t} \qquad \forall \{t, \dots t_n\} \qquad (27)$$

Si : $$\frac{\partial E_1(t)}{\partial t} \ll \frac{\partial E_2(t)}{\partial t} \qquad (28)$$

on voit que l'inégalité (27) est vérifiée.

Pour pouvoir alors obtenir une transformée de Fourier dépendante du temps, il suffira d'effectuer la décomposition $E(t) = E_1(t) \otimes E_2(t)$, de désigner momentanément l'argument de E_1 par τ et celui de E_2 par t , d'effectuer la transformée de Fourier sur t , puis enfin de reposer $\tau = t$ dans tout résultat final.

En ce cas on aura : $$\vec{E}(\tau, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{E}_1(\tau) \otimes E_2(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\vec{E}(\tau, \omega) = \int \vec{E}_1(\tau) \otimes \vec{E}_2(t) e^{i\omega t} dt \qquad (29)$$

et par conséquent : $$\frac{\partial \vec{E}(\tau, \omega)}{\partial \tau} = \int \frac{\partial E_1(\tau)}{\partial \tau} \otimes E_2(t) e^{i\omega t} dt$$

avec $\tau = t$ à la fin de tout calcul.

Précision encore la condition (28) :

On a : $E_1(\tau) \otimes E_2(t) \equiv E(\tau, t) = E(0,0) + \tau \frac{\partial E}{\partial t} + \tau \frac{\partial E}{\partial \tau}$

...

Or $\frac{\partial E_1(\tau)}{\partial \tau} \ll \frac{\partial E_2(t)}{\partial t}$ comme $t\frac{\partial E}{\partial t} = t\,E_1(\tau) \otimes \frac{\partial E_2(t)}{\partial t}$ donc $t\frac{\partial E}{\partial t}$ n'est pas négligeable et est de l'ordre de $E(\tau, t)$, c'est à dire qu'il faut que $\tau \frac{\partial E}{\partial t} \ll t\frac{\partial E}{\partial t} \sim E(t,\tau)$

ou encore
$$\frac{\partial E}{\partial \tau} \ll \frac{E(t,\tau)}{\tau} \tag{30}$$

L'utilisation de l'équation (10) pour décrire l'interaction des ondes exige donc la connaissance de la forme générale du courant dans un plasma pour lequel on a le paramètre de développement ε

On a d'une façon générale :
$$\vec{J} = \sum_q q \int \vec{V}_q\, f_q\, (\vec{v}, \vec{r}, t)\, d^3\vec{v} \tag{31}$$

Et on a d'une part $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \cdots$ et d'autre part $E = E_0 + \varepsilon E_1 + \cdots$ où E_0 est solution de $\left(\kappa^2\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right)E_{i0} = 0$ et E_1 solution de $\left(\kappa^2\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right)E_{1i} = \frac{4\pi i\omega}{c^2} J_{ij}(E_0)$ etc... ; on peut ne pas effectuer l'interaction sur le champ électrique immédiatement et se contenter du développement de la fonction de distribution, puis développer le champ dans l'expression du courant. On a alors la chaîne d'équations :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_0}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_0}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{mc}(\vec{v}\wedge\vec{B}_0)\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0\\
&\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{mc}(\vec{v}\wedge\vec{B}_0)\frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} = -\frac{q}{m}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{B}\right)\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial f_n}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_n}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{mc}(\vec{v}\wedge\vec{B}_0)\frac{\partial f_n}{\partial \vec{v}} = -\frac{q}{m}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{B}\right)\frac{\partial f_{n-1}}{\partial \vec{v}}
\end{aligned} \tag{32}$$

En première approximation, pour la fonction f_0, on peut supposer $\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial \vec{r}} = 0$. En ce cas on a $f_0 = f_0(v_\parallel, v_\perp)$ et en intégrant suivant les trajectoires on trouve :

$$f_1 = -\int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec{r}_0\, d\vec{v}_0\, \frac{q}{m}\left[\vec{E}(\vec{r}_0) + \frac{1}{c}\vec{v}_0\wedge\vec{B}_0(\vec{r}_0)\right]\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}(t') - \vec{r}_0)\,\delta(\vec{v} - \vec{v}(t') - \vec{v}_0)$$

De même pour f_2 :

$$f_2 = \frac{(-1)^2 q^2}{m^2}\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \int d\vec{r}_{01}\, d\vec{r}_{02}\, d\vec{v}_{01}\, d\vec{v}_{02}\left[\vec{E}(r_{02}) + \frac{1}{c}\vec{V}_{02}\wedge\vec{B}(\vec{r}_{02})\right]\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left[\vec{E}(\vec{r}_{01}) + \frac{1}{c}\vec{V}_{01}\wedge\vec{B}(\vec{r}_{01})\right]\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} \cdot$$
$$\cdot\,\delta(\vec{r} - \vec{r}(t) - \vec{r}_{01})\,\delta(\vec{r} - \vec{r}(t_1) - \vec{r}_{02})\,\delta(\vec{v} - \vec{v}(t_2) - \vec{v}_{01})\,\delta(\vec{v} - \vec{v}(t_1) - \vec{v}_{02}) \tag{33}$$

Il est très important de remarquer que les fonctions $\vec{r}(t_0)$, $\vec{r}(t_1)$, $\vec{v}(t_0)$, $\vec{v}(t_1)$ correspondent à des mouvement identiques rapportés à des variables de temps différentes. On écrivait de la même façon le terme d'ordre n. On peut finalement écrire la forme du courant.

Posons pour cela :
$$\frac{q}{m}\left[\vec{E}(\vec{r}_{0i}) + \frac{1}{c}\vec{V}_{0i}\wedge\vec{B}(\vec{r}_{0i})\right] = \vec{F}_{0i}(E) \tag{34}$$

On trouve l'expression obtenue par Karpann et al.

alors :

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \int d^3\vec{v}\cdot\vec{V} \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \int_{-\infty}^{t=t_n} dt_{n-1} \cdots \int_{-\infty}^{t_1} d\tau \int d\vec{r}_{on} \cdots d\vec{r}_{o1}\; d\vec{v}_{on} \cdots d\vec{v}_{o1} \cdot$$

$$\vec{F}_{on}\frac{\partial}{\partial v} \cdots \vec{F}_{o1}\frac{\partial f_o}{\partial v}\; \delta(\vec{r}-\vec{r}(t)-\vec{r}_{on}) \cdots \delta(\vec{r}-\vec{r}(t_o)-\vec{r}_{o1})\,\delta(\vec{v}-\vec{v}(t)-\vec{v}_{on}) \cdots \delta(\vec{v}-\vec{v}(t_o)-\vec{v}_{o1}) \qquad (35)$$

Ceci nous donne la forme générale du courant et nous permet de conclure que l'on peut toujours poser

$J(E) = J_1(E) + \varepsilon J_2(E) + \varepsilon^2 J_3(E) + \cdots$ où E est le champ électrique non perturbé

et où $J_1(E)$ est linéaire en E, J_2 quadratique, J_3 cubique, etc...

Avant de déduire l'équation d'évolution de $\langle E^2_{k\omega}\rangle$ remarquons encore que puisque

$\langle \vec{E}(\vec{r},t,\tau)\,\vec{E}(\vec{r}',t',\tau)\rangle$ ne doit dépendre que de $\vec{r}-\vec{r}'$ et $t-t'$ (nous avons séparé

E en mouvement rapide en t et lent en τ), alors en représentant le champ au moyen de l'intégrale de Fourier on a :

$$\langle E_i(\vec{r},t,\tau)E_j(\vec{r}',t',\tau)\rangle = \int d\vec{k}\,d\vec{k}'\,d\omega\,d\omega' \langle E_i(\vec{k},\omega,\tau)E_j(\vec{k}',\omega',\tau)\rangle e^{i\omega(t-t')-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}\, e^{i(\omega+\omega')t - i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}'} \qquad (36)$$

et pour que cette expression ne dépende que de t - t' et r - r' il faut que l'on ait $\langle E_i(\vec{k},\omega,\tau)E_j(\vec{k}',\omega',\tau)\rangle = \langle E_i E_j^+\rangle_{k\omega}\,\delta(\omega+\omega')\,\delta(\vec{k}+\vec{k}')$

et de la même façon on aura $\langle E_i(\vec{k},\omega,\tau)E_j^+(\vec{k}',\omega',\tau)\rangle = \langle E_i(\vec{k},\omega,\tau)E_j^+(\vec{k},\omega,\tau)\rangle\,\delta(\omega-\omega')\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$

Si d'autre part nous avions en $\vec{r}$ une décomposition identique à celle que nous avons en t :

$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(r,t) \otimes \vec{E}_2(\rho,\tau)$ avec E_1 homogène et E_2 faiblement inhomogène, on aboutirait pour $\vec{r}$ à une discussion semblable à celle qui vient d'être faite pour t.

Comme $\dfrac{\partial E^2(r,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial\tau}\int d\vec{k}\,d\omega\,d\vec{k}'d\omega'\; E_j(\tau,\vec{k},\omega)E^j(\tau,\vec{k}',\omega')\,e^{i(\omega+\omega')t - i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}}$ (37)

il s'ensuit que la moyenne de l'équation (10) s'écrit si on tient compte de ce que $\vec{B}(\vec{k},\omega,\tau) = \frac{c}{\omega}\,\vec{k}\wedge\vec{E}(\vec{k},\omega,\tau)$

$$\frac{1}{8\pi}\int d\omega\cdot d\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\langle E_j(\tau,\vec{k},\omega)E^{+j}(\tau,\vec{k},\omega)\rangle + (k^2\delta_{ij}-k_ik_j)\frac{c^2}{\omega^2}\langle E_j(\tau,\vec{k},\omega)E^{+j}(\tau,\vec{k},\omega)\rangle\right] + \qquad (38)$$

$$\frac{c}{4\pi}\langle \operatorname{div}\vec{E}\wedge\vec{B}\rangle + \langle \vec{J}(E)\cdot\vec{E}\rangle = 0$$

(en absence de courant extérieur)

$J(E)$ contient un terme linéaire et d'autres termes non linéaires, écrivons-le sous la forme $J_1(E) + \varepsilon\,\Delta J$.

. Le terme $J_1(E)$ s'écrit explicitement :

$$\vec{J}_1(E) = \int d\omega\,d\vec{k}\int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec{r}'\,\sigma(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\,e^{i\omega t' - i\vec{k}\cdot\vec{r}'}\,E(\tau,\vec{\rho},\vec{k},\omega) \qquad (39)$$

où pour σ on peut prendre la définition qui découle de la formule (35).

On peut facilement voir que $J_1(E)$ contient une contribution au terme $\frac{\partial \langle E^2 \rangle_{\kappa\omega}}{\partial t}$ ce que nous allons mettre en évidence.

Dans (39) on a posé $\vec{E}(\vec{r}', \vec{\rho}, t', \tau) = \int d\omega . d\vec{\kappa}\ \vec{E}(\tau, \rho, \omega, \vec{\kappa}) e^{i\omega t' - i\vec{\kappa}.\vec{r}'}$

Reposons dans (39) $\tau = t'$, $\vec{\rho} = \vec{r}'$ comme en vertu des précautions déjà prises nous pouvons effectivement le faire. Alors, comme $\frac{\partial E}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial E}{\partial \vec{\rho}}$ sont faibles on a le développement :

$$\vec{E}(t', \vec{r}', \vec{\kappa}, \omega) = \vec{E}(t, \vec{r}, \vec{\kappa}, \omega) + (t-t')\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t, \vec{r}, \vec{\kappa}, \omega) + (\vec{r}-\vec{r}')\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}}(t, \vec{r}, \vec{\kappa}, \omega)$$

Si, dans la formule (39) on multiplie et on divise par $e^{i\omega t - i\vec{\kappa}.\vec{r}}$ alors on trouve l'expression

$$\vec{J_1}(E) = \int d\vec{\kappa}\, d\omega\, e^{i\omega t - i\vec{\kappa}\vec{r}} \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec{r}'\ \hat{\sigma}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') \left\{ \vec{E}(\vec{\kappa}, \omega, \vec{r}, t) + (t-t')\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (\vec{r}-\vec{r}')\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}} \right\} e^{i\omega(t-t') - i\vec{\kappa}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

D'où en intégrant par rapport à t' on trouve .

$$\vec{J_1}(E) = \int d\vec{\kappa} . d\omega\, e^{i\omega t - i\vec{\kappa}.\vec{r}} \left\{ \hat{\sigma}(\omega, \vec{\kappa}).\vec{E}(\vec{\kappa}, \omega, t, \vec{r}) - i\frac{\partial \hat{\sigma}(\vec{\kappa}, \omega)}{\partial \omega}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + i\frac{\partial \hat{\sigma}(\omega, \vec{\kappa})}{\partial \vec{\kappa}}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}} \right\}$$

où : $$\sigma(\omega, \kappa) = \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}\ \sigma(\vec{R}, u)\, e^{i\omega u - i\vec{\kappa}.\vec{R}}$$

$$-i\frac{\partial \sigma(\omega, \kappa)}{\partial \omega} = \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}\ \sigma(\vec{R}, u).u\, e^{i\omega u - i\vec{\kappa}.\vec{R}}$$

$$\text{et } i\frac{\partial \sigma(\omega, \kappa)}{\partial \vec{\kappa}} = \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}\ \sigma(\vec{R}, u) e^{i\omega u - i\vec{\kappa}.\vec{R}}$$

Si, maintenant, nous formons l'expression $\langle (J_1(E) + J_1^{+}(E))(E+E^{+}) \rangle$ afin d'avoir des grandeurs réellesdans l'espace temps, on trouve en transformée de Fourier :

$$\frac{1}{2}\int d\vec{\kappa}.d\omega \langle (J_1(\kappa,\omega)E^{+}(\kappa,\omega) + J_1^{+}(\kappa,\omega)E(\kappa,\omega)\rangle = \frac{1}{2}\int d\omega\, d\vec{\kappa} \left\{ (\sigma+\sigma^{+})\langle EE^{+}\rangle_{\kappa\omega} - i\frac{\partial \sigma+\sigma^{+}}{\partial \omega}\frac{\partial \langle EE^{+}\rangle_{\kappa\omega}}{\partial t} + i\frac{\partial \sigma+\sigma^{+}}{\partial \vec{\kappa}}.\frac{\partial \langle EE^{+}\rangle}{\partial \vec{r}} \right\}$$

Posons :

$$i\sigma_{ij} = (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij})\frac{\omega}{4\pi} \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij} \qquad \varepsilon'_{ij} = Re\,\varepsilon_{ij} \quad \varepsilon''_{ij} = Im\,\varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij} \quad \text{et donc} \quad \sigma+\sigma^{+} = \sigma'$$

$$\frac{\partial \sigma+\sigma^{+}}{\partial \omega} = i\frac{\partial \sigma'}{\partial \omega} = \left[\frac{\partial \omega \varepsilon'_{ij}}{\partial \omega} - \delta_{ij} \right] \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial \kappa} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial (\omega \varepsilon'_{ij})}{\partial \vec{\kappa}}$$

L'équation (38) s'écrit alors, si on pose $E_i = \tau_i / E /$

$$\frac{1}{4\pi}\int d\omega d\vec{\kappa}\,\frac{\partial \langle EE^+\rangle_{\kappa\omega}}{\partial \tau}\left\{\frac{\partial \omega \varepsilon'_{ij}}{\partial \omega}+\frac{c^2\kappa^2}{\omega^2}\left(\frac{\kappa_i\kappa_j}{\kappa^2}-\delta_{ij}\right)\right\}\tau^i_\kappa \tau^i_{-\kappa}+\frac{1}{4\pi}\int d\omega.d\vec{\kappa}\,\frac{\partial \omega \varepsilon'_{ij}}{\partial \vec{\kappa}}\,\frac{\partial \langle EE^+\rangle_{\kappa\omega}}{\partial \vec{r}}\,\tau^i_\kappa \tau^i_{-\kappa}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int d\vec{\kappa}.d\omega\;\sigma'_{ij}\langle EE^+\rangle\,\tau^i_\kappa \tau^i_{-\kappa} = -\varepsilon\langle \vec{E}.\Delta\vec{J}\rangle \qquad (40)$$

Cette équation doit être complétée par l'équation de Maxwell

$$\left\{K_iK_j-\kappa^2\delta_{ij}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right\}E_j = \varepsilon\,\Delta J_i\ldots\frac{4\pi i\omega}{c^2}$$

Toute la partie située à gauche de l'expression (40) n'est autre que la théorie linéaire. La partie non linéaire est liée à l'évaluation correcte de

Il est évident que la formule (35) nous donne l'expression théorique de $\langle \vec{E}.\Delta\vec{J}\rangle$ mais son expression calculée est un problème difficile que nous avons résolu jusqu'au deuxième ordre, les calculs à l'ordre supérieur deviennent inextricables.

D'autre part en prenant l'équation (10) pour décrire les phénomènes non linéaires ou ce qui revient au même, en prenant l'équation (40) nous sommes amenés si l'on veut obtenir une équation d'évolution fermée de $\langle E^2_{\kappa\omega}\rangle$, à faire une étude de l'ordre des différents termes constituant $\langle \vec{E}.\Delta\vec{J}\rangle$, ce que nous avons fait au § 2

Enfin le § 3 est consacré à l'application pratique dans le cas d'un champ magnétique fort, étude qui, à notre connaissance, est faite pour la première fois.

§2. CALCUL DES DIFFERENTS ORDRES DU COURANT DU PLASMA

Pour calculer les différents ordres du courant, on pourrait prendre la transformée de Fourier de l'expression (35) ou bien on peut prendre la transformée de Fourier des équations de Vlassov, ce qui est peut-être un peu plus court et que nous allons faire. Nous calculerons successivement f_1 et f_2 (κ,ω) puis $J_2(\kappa,\omega)$

A. Transformée de Fourier des équations de la chaîne et étude des solutions.

Si on pose $\frac{eB_0}{mc} = \Omega$ où $\vec{B}_0$ champ magnétique extérieur constant,

$$\frac{e}{m}\left(\vec{E}(\kappa,\omega)+\vec{V}\wedge\frac{\kappa\wedge E(\kappa,\omega)c}{\omega}\right)=\vec{F}(\kappa,\omega) \qquad V_x = V_\perp\cos\theta \quad V_y = V_\perp\sin\theta \quad V_z = V_{//}$$

et par conséquent $\frac{\partial f_i}{\partial \theta} = -V_y\frac{\partial f_i}{\partial V_x}+V_x\frac{\partial f_i}{\partial V_y}$ avec $f_i(r,v,t)=\int d\vec{\kappa}\,e^{i\vec{\kappa}\vec{r}}\int d\omega\, e^{-i\omega t}\frac{f_i(\kappa,\omega,\vec{v})}{(2\pi)^4}$

comme $\vec{V}\wedge\vec{B}_0 = (\vec{i}V_y-\vec{j}V_x)B_0$ donc $(\vec{V}\wedge\vec{B}_0).\frac{\partial f}{\partial \vec{V}} = -\frac{\partial f}{\partial \theta}.B_0$

alors, à partir de l'équation (12) on obtient la chaîne d'équations

$$\int e^{-i\omega t + i\vec{K}.\vec{r}}\, d\omega\, d\vec{K} \left\{ i(\omega - \vec{K}.\vec{V}) f_0(\omega,\vec{K}) + \Omega \frac{\partial f_0}{\partial \theta}(\omega,K) \right\} = 0$$

$$\int e^{-i\omega t + i\vec{K}.\vec{r}}\, d\omega.d\vec{K} \left\{ i(\omega - \vec{K}.\vec{V}) f_1(\omega,\vec{K}) + \Omega \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(\omega,K) + \int \vec{F}(\vec{K}',\omega',\vec{V}) \frac{\partial f_0}{\partial \vec{V}}(\vec{K},\omega) e^{-i\omega' t + i\vec{K}'.\vec{r}}\, d\omega' d\vec{K}' \right\} = 0 \qquad (41)$$

$$\int e^{-i\omega t + i\vec{K}.\vec{r}}\, d\omega.d\vec{K} \left\{ i(\omega - \vec{K}.\vec{V}) f_2(\omega,\vec{K}) + \Omega \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(\omega,K) + \int \vec{F}(\vec{K}',\omega',\vec{V}) \frac{\partial f_1}{\partial \vec{V}}(\vec{K},\omega) e^{-i\omega' t + i\vec{K}'.\vec{r}}\, d\omega' d\vec{K}' \right\} = 0$$

après avoir modifié toutes les équations par $e^{-i\omega^* t + i\vec{K}^*.\vec{r}}$ puis intégré en t et r puis reposé $\omega^* = \omega$, $\vec{K}^* = \vec{K}$

on trouve :

$$f_0 = f_0(V_\parallel, V_\perp)\ \delta(\omega)\,\delta(K)$$

$$i(\omega - \vec{K}\vec{V}) f_1(\omega,K) + \Omega \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(\omega,K) + \vec{F}(K,\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \vec{V}}(V_\parallel, V_\perp) = 0$$

$$i(\omega - \vec{K}.\vec{V}) f_2(\omega,K) + \Omega \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(\omega,K) + \int \vec{F}(K_1,\omega_1,\vec{V}) \frac{\partial f_1}{\partial \vec{V}}(K_2,\omega_2,\vec{V})\, \delta(\omega_2+\omega_1-\omega)\,\delta(K-K_2-K_1)\, dK_1\, dK_2\, d\omega_1\, d\omega_2$$

Il est très important de noter que si nous avions multiplié toutes les équations par $e^{i\omega^* t - i\vec{K}^*.\vec{r}}$ nous aurions trouvé des fonctions δ du type $\delta(\omega_2+\omega_1+\omega)\,\delta(K+K_2+K_1)$, enfin si l'on avait multiplié la seconde équation par $\exp(i\omega t - i\vec{K}.\vec{r})$ et la troisième par $\exp(-i\omega t + i\vec{K}.\vec{r})$ les fonctions δ auraient eu la forme $\delta(\omega_2-\omega_1+\omega)\,\delta(K+K_2-K_1)$; toutes ces solutions sont aussi valables l'une que l'autre et se déduisent l'une de l'autre en changeant K en $-K$, K_2 en $-K_2$, etc.

Dans le résultat final nous les grouperons toutes en ne calculant toutefois que l'une d'entre elles, les autres s'obtenant par une règle algébrique simple.

Les équations (25) sont toutes de la forme :

$$f'_\theta + \frac{i}{\Omega}(\omega - \vec{K}.\vec{V}) f + \frac{Q(\theta)}{\Omega} = 0 \qquad (42)$$

Pour des raisons physiques évidentes f doit être une fonction périodique de θ ,

L'intégrale générale de (42) s'écrit :

$$f = e^{-\frac{i}{\Omega}\int_{\theta_0}^{\theta}(\omega - \vec{K}.\vec{V})\,d\theta'} \left[f(\theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{Q(\theta')}{\Omega} e^{\frac{i}{\Omega}\int_{\theta_0}^{\theta'}(\omega - \vec{K}\vec{V})\,d\theta''} d\theta' \right] \qquad (43)$$

Pour que $f(\theta)$ soit fonction périodique de θ il faut que $f(\theta_0) = 0$. En effet, lorsque l'angle θ augmente de 2π le terme $\exp -\frac{i}{\Omega}\int_{\theta_0}^{\theta}(\vec{\omega} - \vec{K}\vec{V})\,d\theta'$ augmente de $\exp \frac{i}{\Omega}\int_{\theta}^{\theta+2\pi}(\omega - \vec{K}\vec{V})\,d\theta'$

or $\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \omega\, d\theta' = 2\pi\omega$ et comme $\frac{\omega}{\Omega} \neq n$ entier en général, alors $\exp 2i\pi\frac{\omega}{\Omega} \neq 1$

Supposons $Q(\theta)$ fonction périodique de θ de période 2π. $Q(\theta'+2\pi) = Q(\theta')$

En introduisant $\exp -\frac{i}{\Omega}\int_{\theta_0}^{\theta}(\omega-\vec{K}.\vec{V})\,d\theta'$ sous le signe d'intégration relatif à $Q(\theta')$ on a

encore pour f l'expression : $f = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{Q(\theta')}{\Omega} e^{\frac{i}{\Omega}\int_{\theta}^{\theta'}(\omega-\vec{K}\vec{V})\,d\theta''}$

Changeons θ en $\theta+2\pi$ alors $f = \int_{\theta_0}^{\theta+2\pi} \frac{Q(\theta')}{\Omega} e^{\frac{i}{\Omega}\int_{\theta+2\pi}^{\theta'}(\omega-\vec{K}\vec{V})\,d\theta''}$

Dans cette dernière expression reposons $(\theta'-2\pi) = u$, alors on a : $f = \int_{\theta_0-2\pi}^{\theta} \frac{Q(u)}{\Omega} e^{\frac{i}{\Omega}\int_{\theta+2\pi}^{u+2\pi}(\omega-\vec{K}\vec{V})\,d\theta''} du$

comme $\int_{\theta+2\pi}^{u+2\pi}(\omega-\vec{K}\vec{V})\,d\theta'' = \int_{\theta}^{u}(\omega-\vec{K}\vec{V})\,d\theta''$, alors f n'est périodique que si $\theta_0 = -\infty$.

Pour parvenir à cette conclusion nous avons supposé $Q(\theta)$ périodique. Or $Q(\theta)$ est fonction de $\vec{F}(\vec{\kappa},\omega)$ qui est périodique et fonction de $\frac{\partial f_{n-1}}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial v_{\parallel}}\vec{h} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial v_{\perp}}(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}) + \frac{1}{v_{\perp}}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial \theta}(-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j})$ et donc si f_{n-1} est périodique $\frac{\partial f_{n-1}}{\partial \vec{v}}$ l'est aussi, donc aussi $Q(\theta)$ et donc f_n de même.

B. Calcul explicite de f_1

On a bien sûr pour f_0 : $f_0 = f_0(v_{\parallel}, v_{\perp})\,\delta(\omega)\delta(\kappa)$

$$f_1 = \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\vec{F}(\vec{\kappa},\omega)}{\Omega}.\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} e^{\frac{i}{\Omega}\int_{\theta}^{\theta'}(\omega-\vec{K}\vec{V})\,d\theta''} d\theta'$$

posons $\varphi = (\vec{K}_{\perp}, \vec{iK}_x)$

on a $\frac{i}{\Omega}\int_{\theta}^{\theta'}(\omega-\vec{K}.\vec{V})\,d\theta'' = \frac{i}{\Omega}\int_{\theta}^{\theta'}\left(\omega-K_{\perp}v_{\perp}\cos(\theta-\varphi)-K_{\parallel}v_{\parallel}\right)d\theta'' = \frac{i}{\Omega}\left\{(\omega-K_{\parallel}v_{\parallel})(\theta'-\theta)-K_{\perp}v_{\perp}\left[\sin(\theta'-\varphi)-\sin(\theta-\varphi)\right]\right\}$

Nous allons d'autre part utiliser l'égalité connue $e^{\frac{i}{\Omega}K_{\perp}v_{\perp}\sin(\varphi-\theta)} = \sum_{n=1}^{\infty} J_n\left(\frac{K_{\perp}v_{\perp}}{\Omega}\right)e^{in(\varphi-\theta)}$

posons $\left[(\omega-K_{\parallel}v_{\parallel})\theta'-K_{\perp}v_{\perp}\sin(\theta'-\varphi)\right]\frac{i}{\Omega} = \Psi(K,\omega,v,\theta')$ en ce cas : $\frac{i}{\Omega}\int_{\theta}^{\theta'}(\omega-Kv)\,d\theta'' = \Psi(K,v,\theta')-\Psi(K,v,\theta)$

si on tient compte du fait que $e^{\Psi(K,v,\theta')} = \sum_n J_n\left(\frac{K_{\perp}v_{\perp}}{\Omega}\right)e^{in(\varphi-\theta')}e^{\frac{i}{\Omega}(\omega-K_{\parallel}v_{\parallel})\theta'} = \sum_n J_n\left(\frac{K_{\perp}v_{\perp}}{\Omega}\right)e^{in\varphi}\frac{i}{\Omega}X_n\theta'$

où on a posé $X_n = \omega - K_{\parallel}v_{\parallel} - n\Omega$

alors on peut écrire : $$f_1 = e^{-\Psi(K,v,\theta)}\int_{-\infty}^{\theta}\frac{\vec{F}(\vec{\kappa},v,\omega)}{\Omega}.\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}e^{\Psi(K,v,\theta')}\,d\theta' \qquad (44)$$

et on aura d'ailleurs, d'une façon générale :

$$f = e^{-\Psi(K,v,\theta)}\int_{-\infty}^{\theta}\frac{Q(\theta')}{\Omega}.e^{\Psi(K,v,\theta')}\,d\theta' \qquad (45)$$

Nous devons maintenant évaluer le produit $\vec{F}.\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}$

Si pour f_0 on choisi une fonction du type $\beta e^{-\alpha v_{\parallel}^2 - \alpha v_{\perp}^2}$ à températures parallèles et $\perp$ à B_0 égales on a : $\frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} = -\alpha v_{\parallel} f_0$ et $\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} = -\alpha v_{\perp} f_0$

et donc on peut écrire : $\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f_0}{\partial v_n}\vec{h} + \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp}(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}) = -\alpha.2.f_0(v_n\vec{h}+v_\perp(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})) = -2\alpha f_0.\vec{v}$

D'où $\frac{e}{m}\left\{\vec{E}+\vec{v}\wedge\frac{\vec{\kappa}\wedge\vec{E}}{\omega}\right\}.\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = \frac{e}{m}\vec{E}.\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}$ car $\left(\vec{v}\wedge\frac{\vec{\kappa}\wedge\vec{E}}{\omega}\right).\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0$

Par conséquent en posant égal à ε l'angle $(\vec{E_\perp}, \vec{i}\,E_n)$ on obtient :

$$\vec{F}(\vec{\kappa},\vec{v},\theta').\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = \frac{e}{m}\vec{E}(\vec{\kappa},\omega).\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = \frac{-2\alpha e}{m} f_0\left\{v_n E_{11}(\vec{\kappa},\omega) + v_\perp E_\perp(\kappa,\omega)\cos(\theta'-\varepsilon)\right\}$$

L'expression de f_1 prend alors la forme :

$$f_1 = e^{-\psi(\vec{\kappa},\vec{v},\theta)}\frac{-2\alpha e}{m\Omega}\int_{-\infty}^{\theta} f_0\left\{v_n E_{11}(\vec{\kappa},\omega) + v_\perp E_\perp(\vec{\kappa},\omega)\cos(\theta'-\varepsilon)\right\}\sum_{n=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right)e^{in\varphi}\, e^{\frac{i}{\Omega}X_n\theta'}\, d\theta' \quad (46)$$

Il est nécessaire maintenant d'effectuer l'intégration par rapport à l'angle θ'

Comme $\cos(\theta'-\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(e^{i(\theta'-\varepsilon)} + e^{-i(\theta'-\varepsilon)}\right)$ alors on peut écrire :

$$\cos(\theta'-\varepsilon)\sum_n J_n.e^{in\varphi}\, e^{\frac{i}{\Omega}X_n.\theta'} = \frac{1}{2}\sum_n\left\{J_n e^{in\varphi-i\varepsilon+\frac{i}{\Omega}X_{n-1}\theta'} + J_n.e^{in\varphi+i\varepsilon+\frac{i}{\Omega}X_{n+1}\theta'}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_n\left\{J_{n+1}e^{i\varphi-i\varepsilon} + J_{n-1}e^{-i\varphi+i\varepsilon}\right\}e^{in\varphi}\, e^{\frac{i}{\Omega}X_n\theta'}$$

D'où $f_1 = e^{-\psi(\vec{\kappa},\vec{v},\theta)}\left(\frac{-2\alpha e}{m\Omega}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\theta} f_0.G_n\, e^{\frac{i}{\Omega}X_n\theta'}\, d\theta'$ avec $\frac{iX_n}{\Omega} = \frac{i}{\Omega}(\omega-\kappa_n v_n-n\Omega)$ (47)

et où nous avons posé: $G_n = \left\{J_n v_{11} E_{11}(\kappa,\omega) + \frac{1}{2}\left(J_{n+1}e^{i(\varphi-\varepsilon)} + J_{n-1}e^{-i(\varphi-\varepsilon)}\right)v_\perp E_\perp(\kappa,\omega)\right\}e^{in\varphi}$

On peut maintenant intégrer par rapport à θ' et on trouve la valeur définitive de f_1 :

$$f_1 = \frac{i2\alpha e}{m} f_0\, e^{\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp v_\perp\sin(\theta-\varphi)}\sum_n \frac{e^{-in(\theta-\varphi)}}{X_n}G_n$$

Nous avons simplifié le terme $\exp\frac{i}{\Omega}(\kappa_{11}v_{11}-\omega)\theta$ contenu dans $e^{-\psi(\vec{\kappa},\vec{v},\theta)}$, avec le terme $\exp\frac{i}{\Omega}(\omega-\kappa_{11}v_{11})\theta$ contenu dans $\exp\frac{i}{\Omega}X_n$. Comme G_n comprend J_{n-1} et J_{n+1} on peut lui donner une autre forme en utilisant les formules récurrentes des fonctions de Bessel :

$$J_{n-1} = \frac{n\Omega}{\kappa_\perp v_\perp}J_n + J'_n \qquad \text{et} \qquad J_{n+1} = \frac{n\Omega}{\kappa_\perp v_\perp}J_n - J'_n$$

par conséquent :

$$\frac{1}{2}\left(J_{n+1}e^{i(\varphi-\varepsilon)} + J_{n-1}e^{-i(\varphi-\varepsilon)}\right) = \frac{n\Omega}{\kappa_\perp v_\perp}J_n\cos(\varphi-\varepsilon) - J'_n\, i\sin(\varphi-\varepsilon)$$

alors f_1 peut encore s'écrire :

$$f_1 = \frac{2\alpha i e}{m} f_0\, e^{\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp v_\perp\sin(\theta-\varphi)}\sum_n \frac{e^{-in(\theta-\varphi)}}{X_n}\left\{J_n.v_{11}E_{11}(\kappa,\omega) + \left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp v_\perp}J_n\cos(\varphi-\varepsilon) - J'_n\, i\sin(\varphi-\varepsilon)\right]v_\perp E_\perp(\kappa,\omega)\right\} \quad (48)$$

Cette expression qui est de la forme : $f_1 = \sum_i \frac{\partial f_1}{\partial E_i}.E_i$ est linéaire en E $\qquad (i=1,2,3)$

C. Calcul de f_2 .

Calculons maintenant $\frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}}$ puisque f_2 contient le produit $\vec{F}(\vec{\kappa},\omega,\vec{v}).\frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}}$

Comme f_0 a la forme : $f_0 = \beta\, e^{-\alpha v_\perp^2 - \alpha v_\parallel^2}$ avec $\beta = \frac{n_e}{(2\pi\alpha)^{3/2}}$ $\alpha = \frac{m}{2T}$ n_e densité numérique

Alors $\frac{\partial f_1}{\partial v_\parallel}$, $\frac{\partial f_1}{\partial v_\perp}$, $\frac{\partial f_1}{\partial \theta}$ vont s'écrire :

$$\frac{\partial f_1}{\partial v_\parallel} = \frac{ie}{T} f_0 e^{\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp v_\perp \sin(\theta-\varphi)} \sum_n \frac{e^{-in(\theta-\varphi)}}{X_n} \left\{ E_\parallel(\kappa)\left[-\frac{m v_\parallel^2}{T} J_n + \frac{\kappa_\parallel . J_n . v_\parallel}{X_n} + J_n\right] + \right.$$

$$\left. E_x(\kappa) v_\perp \left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp v_\perp} J_n \cos\varphi - J_n' i \sin\varphi\right]\left(\frac{-m v_\parallel}{T} + \frac{\kappa_\parallel}{X_n}\right) + E_y(\kappa) v_\perp \left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp v_\perp} J_n \sin\varphi + i J_n' \cos\varphi\right]\left(\frac{-m v_\parallel}{T} + \frac{\kappa_\parallel}{X_n}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v_\perp} = \frac{ie}{T} f_0 e^{\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp v_\perp \sin(\theta-\varphi)} \sum_n \frac{e^{-in(\theta-\varphi)}}{X_n} \left\{ E_\parallel(\kappa)\left[\frac{-m v_\perp v_\parallel}{T} J_n + \frac{i . J_n . v_\parallel . \kappa_\perp}{\Omega} \sin(\theta-\varphi) + \frac{\kappa_\perp}{\Omega} J_n' . v_\parallel\right] + \right.$$

$$E_x(\kappa)\left[n J_n' . \cos\varphi - i J_n' \sin\varphi - J_n'' \frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega} i \sin\varphi + v_\perp \left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp v_\perp} J_n \cos\varphi - J_n' i \sin\varphi\right]\left[\frac{-m v_\perp}{T} + \frac{i}{\Omega}\kappa_\perp \sin(\theta-\varphi)\right]\right] +$$

$$\left. E_y(\kappa)\left[n J_n' . \sin\varphi + i J_n' \cos\varphi + J_n'' \frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega} i \cos\varphi + v_\perp \left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp v_\perp} J_n \sin\varphi + J_n' i \cos\varphi\right]\left[\frac{-m v_\perp}{T} + \frac{i}{\Omega}\kappa_\perp \sin(\theta-\varphi)\right]\right]\right.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = \frac{ie}{T} f_0 e^{\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp v_\perp \sin(\theta-\varphi)} \sum_n \frac{e^{-in(\theta-\varphi)}}{X_n} \left\{ E_\parallel(\kappa)\, J_n . v_\parallel \left[\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp v_\perp \cos(\theta-\varphi) - in\right] + \right.$$

$$\left. E_x(\kappa)\, v_\perp \left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp v_\perp} J_n \cos\varphi - J_n' i \sin\varphi\right]\left(\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp v_\perp \cos(\theta-\varphi) - in\right) + E_y(\kappa) v_\perp \left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp v_\perp} J_n \sin\varphi + J_n' i \cos\varphi\right]\left[\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp v_\perp \cos(\theta-\varphi) - in\right]\right\}$$

Comme $\frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f_1}{\partial v_\parallel}.\vec{h} + \frac{\partial f_1}{\partial v_\perp}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + \frac{1}{v_\perp}\frac{\partial f_1}{\partial \theta}(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$ et que l'on doit

calculer $\vec{F}(\vec{\kappa}\,\omega,\vec{v}).\frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}}$ alors il est nécessaire d'évaluer $\vec{F}.\vec{h}$, $\vec{F}.(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})$, $\vec{F}(-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j})$

On a par conséquent :

$$\left\{E(\kappa_1) + v\wedge\frac{(\kappa_1\wedge E(\kappa_1))}{\omega_1}\right\}.\vec{h} = E_\parallel + \frac{\vec{h}}{\omega_1}\left[\vec{\kappa}_1(\vec{v}.\vec{E}) - \vec{E}(\vec{v}.\vec{\kappa}_1)\right]$$

$$= E_\parallel\left(1 - \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\cos(\theta-\varphi_1)\right) + E_x \frac{v_\perp \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\cos\theta + E_y \frac{v_\perp \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\sin\theta$$

$$\left\{E(\kappa_1) + v\wedge\frac{[\kappa_1\wedge E(\kappa_1)]}{\omega_1}\right\}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) = E_\parallel \frac{v_\parallel \kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\cos(\theta-\varphi_1) + E_x\left(1 - \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\cos\theta + E_y\left(1 - \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\sin\theta$$

$$\left\{E(\kappa_1) + v\wedge\frac{[\kappa_1\wedge E(\kappa_1)]}{\omega_1}\right\}(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) = E_\parallel \frac{v_\parallel \kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\sin(\theta-\varphi_1) + E_x\left(-\sin\theta + \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\sin\theta + \frac{v_\perp \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\sin\varphi_1\right) + E_y\left(\cos\theta - \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\cos\theta - \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\cos\varphi_1\right)$$

Avant d'écrire la fonction f_2 , nous allons introduire une simplification qui permet de réduire la longueur des calculs. On a formellement :

$$f_2 = e^{\frac{-\psi(\vec{\kappa},\vec{v},\theta)}{\Omega}} \int_{-\infty}^{\theta} d\theta' \int d\kappa_{12}\, d\omega_{12}\, \vec{F}(\omega_1,\vec{\kappa}_1,\vec{v})\, \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}}(\vec{\kappa}_2,\omega_2,\vec{v})\, \delta(\omega_2+\omega_1-\omega)\, \delta(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}_2-\vec{\kappa}_1)\, e^{\psi(\kappa,v,\theta')} \qquad (49)$$

Comme $\frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}}$ contient dans toutes ses composantes le terme : $e^{\frac{i}{\Omega} k_\perp v_\perp \sin(\theta-\varphi)}$

Alors on peut mettre ce terme en évidence et poser : $\frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \vec{v}} e^{\frac{i}{\Omega} k_\perp^{(2)} v_\perp \sin(\theta-\varphi_2)}$

On voit dans la formule (49) apparaître le produit :

$$e^{\frac{i}{\Omega} k_\perp^{(2)} v_\perp \sin(\theta'-\varphi_2)} \; e^{\frac{i}{\Omega} k_\perp v_\perp \sin(\varphi-\theta')} \; e^{-\frac{i}{\Omega}\theta'(k_\parallel v_\parallel - \omega)}$$

Or on a :

$$k_\perp^{(2)} \sin(\theta'-\varphi_2) - k_\perp \sin(\theta'-\varphi) = (k_x^{(2)} - k_x)\sin\theta' - (k_y^{(2)} - k_y)\cos\theta' = |k_\perp^{(2)} - k_\perp| \sin(\theta'-\varphi_{20}) = \tilde{k}_\perp \sin(\theta'-\varphi_{20})$$

où nous avons posé $\varphi_{20} = (k_\perp^{(2)} - k_\perp \, , \, k_x^{(2)} - k_x)$ et $|k_\perp^{(2)} - k_\perp| = \tilde{k}_\perp$

et en ce cas, on a pour f_2 l'expression :

$$f_2 = e^{\frac{i}{\Omega} k_\perp v_\perp \sin(\theta-\varphi)} \; e^{-\frac{i}{\Omega}(\omega - k_\parallel v_\parallel)\theta} \int_{-\infty}^{\theta} d\theta' \int dk_1 \, dk_2 \, d\omega_1 \, d\omega_2 \; \vec{F}(\vec{k}_1, \omega_1, \vec{v}) \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \vec{v}} (\vec{k}_2, \omega_2, \vec{v}) \cdot$$

$$e^{\frac{i}{\Omega} \tilde{k}_\perp v_\perp \sin(\theta'-\varphi_{20})} \; e^{-\frac{i}{\Omega}(k_\parallel v_\parallel - \omega)\theta'} \; \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \, \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \qquad (50)$$

Nous n'allons pas effectuer l'intégration en θ' tout de suite et nous la réaliserons directement dans $\vec{J}_2$.
Mais on voit que la contraction que nous avons opérée en introduisant φ_{20} et $\tilde{k}_\perp$ permet de ramener un produit de trois fonctions de Bessel les expressions de $\vec{J}_2$ qui normalement contiennent des produits de quatre fonctions. de Bessel.
En exprimant le produit $\vec{F} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}}$ au moyen des formules précédentes nous allons maintenant écrire l'expression complète de f_2 :

$$f_2 = e^{\frac{i k_\perp v_\perp}{\Omega} \sin\theta - \varphi} \; \frac{e^2}{m T \Omega} \; e^{-\frac{i}{\Omega}(\omega - k_\parallel v_\parallel)\theta} \; f_0 \int_{-\infty}^{\theta} d\theta' \int dk_{12} \, d\omega_{12} \; e^{\frac{i}{\Omega} \tilde{k}_\perp v_\perp \sin(\theta'-\varphi_{20})} \; e^{-\frac{i}{\Omega}(k_\parallel v_\parallel - \omega)} \; \delta(\omega_2 + \omega_1 - \omega) \, \delta(k - k_1 - k_2) \sum_n \frac{e^{-in(\theta'-\varphi_2)}}{X_n^{(2)}}$$

$$E_n(k_1) E_n(k_2) \Big\{ \Big[1 - \cos(\theta'-\varphi_1) \frac{v_\perp k_\perp^{(1)}}{\omega_1} \Big] \Big[\frac{-m v_\parallel^2}{T} J_n^{(2)} + \frac{k_\parallel^{(2)} J_n^{(2)} v_n}{X_n^{(2)}} + J_n^{(2)} \Big] +$$

$$\frac{v_\parallel k_\perp^{(1)}}{\omega_1} \cos(\theta'-\varphi_1) \Big[\frac{-m v_\perp v_\parallel}{T} J_n^{(2)} + i \frac{J_n^{(2)} v_\parallel k_\perp^{(2)}}{\Omega} \sin(\theta'-\varphi_2) + \frac{k_\perp^{(2)}}{\Omega} J'^{(2)}_n v_\parallel \Big] +$$

$$\frac{v_\parallel k_\perp^{(1)}}{\omega_1} \sin(\theta'-\varphi_1) \Big[\frac{i}{\Omega} k_\perp^{(2)} v_\perp \cos(\theta'-\varphi_2) - in \Big] J_n^{(2)} v_\parallel \Big\} +$$

$$E_n(k_1) E_n(k_2) \Big\{ \Big[1 - \cos(\theta'-\varphi_1) \frac{v_\perp k_\perp^{(1)}}{\omega_1} \Big] v_\perp \Big[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J'^{(2)}_n \cdot i \sin\varphi_2 \Big] \Big(\frac{-m v_\parallel}{T} + \frac{k_\parallel^{(2)}}{X_n^{(2)}} \Big) +$$

$$\Big[\frac{v_\parallel k_\perp^{(1)}}{\omega_1} \cos(\theta'-\varphi_1) \Big] \Big[n J'^{(2)}_n \cos\varphi_2 - J'^{(2)}_n i \sin\varphi_2 - J''^{(2)}_n \cdot \frac{k_\perp^{(2)} v_\perp}{\Omega} i \sin\varphi_2 + v_\perp \Big(\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J'^{(2)}_n i \sin\varphi_2 \Big) \times$$

$$\times \Big[-\frac{m v_\perp}{T} + \frac{i}{\Omega} k_\perp^{(2)} \sin(\theta'-\varphi_2) \Big] \Big] + \frac{v_\parallel k_\perp^{(1)}}{\omega_1} \sin(\theta'-\varphi_1) v_\perp \Big[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J'^{(2)}_n \cdot i \sin\varphi_2 \Big] \Big[\frac{i}{\Omega} k_\perp^{(2)} v_\perp \cos(\theta'-\varphi_2) - in \Big] \Big\} +$$

$$E_n(k_1) E_y(k_2) \Big\{ \Big[1 - \cos(\theta'-\varphi_1) \frac{v_\perp k_\perp^{(1)}}{\omega_1} \Big] v_\perp \Big[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cdot \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n \cdot i \cos\varphi_2 \Big] \Big(\frac{-m v_\parallel}{T} + \frac{k_\parallel^{(2)}}{X_n^{(2)}} \Big) +$$

$$\Big[\frac{v_\parallel k_\perp^{(1)}}{\omega_1} \cos(\theta'-\varphi_1) \Big] \Big[n J'^{(2)}_n \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n i \cos\varphi_2 + J''^{(2)}_n \cdot \frac{k_\perp^{(2)} v_\perp}{\Omega} \cdot i \cdot \cos\varphi_2 +$$

$$+V_\perp\left[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\cdot\sin\varphi_2+J_n'^{(2)}\,i\cos\varphi_2\right]\left[\frac{-mv_\perp}{T}+\frac{i}{\Omega}\,k_\perp^{(2)}\sin(\theta'-\varphi_2)\right]\Big]+$$

$$+\left[\frac{v_\parallel k_\perp^{(1)}}{\omega_1}\sin(\theta'-\varphi_1)\right]v_\perp\left[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\sin\varphi_2+J_n'^{(2)}\cdot i\cos\varphi_2\right]\left[\frac{i}{\Omega}\,k_\perp^{(2)}v_\perp\cos(\theta'-\varphi_2)-in\right]\Bigg\}+$$

$$E_x(k_1)E_\parallel(k_2)\Bigg\{\frac{v_\perp k_\parallel^{(1)}\cos\theta'}{\omega_1}\left[\frac{-mv_\parallel^2}{T}\,J_n^{(2)}+\frac{k_\parallel^{(2)}J_n^{(2)}v_\parallel}{X_n^{(2)}}+J_n^{(2)}\right]+\cos\theta'\left(1-\frac{v_\parallel k_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\left[\frac{-mv_\perp v_\parallel}{T}J_n^{(2)}+\frac{iJ_n^{(2)}\cdot v_\parallel k_\perp^{(2)}}{\Omega}\sin(\theta'-\varphi_2)+\right.$$

$$\left.+\frac{k_\perp^{(2)}\cdot v_\parallel}{\Omega}\,J_n'^{(2)}\right]+\left[-\sin\theta'+\frac{v_\parallel k_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\sin\theta'+\frac{v_\perp k_\perp^{(1)}\sin\varphi_1}{\omega_1}\right]\frac{J_n^{(2)}v_\parallel}{v_\perp}\left[\frac{i}{\Omega}\,k_\perp^{(2)}v_\perp\cos(\theta'-\varphi_2)-in\right]\Bigg\}+$$

$$E_x(k_1)E_x(k_2)\Bigg\{\frac{v_\perp k_\parallel^{(1)}\cos\theta'}{\omega_1}\left[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J_n'^{(2)}i\sin\varphi_2\right]v_\perp\left[\frac{-mv_\parallel}{T}+\frac{k_\parallel^{(2)}}{X_m^{(2)}}\right]+$$

$$\cos\theta'\left(1-\frac{v_\parallel k_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\left[nJ_n'^{(2)}\cos\varphi_2-J_n'^{(2)}i\sin\varphi_2-J_n''^{(2)}\cdot\frac{k_\perp^{(2)}v_\perp}{\Omega}\,i\sin\varphi_2+v_\perp\left(\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J_n'^{(2)}i\sin\varphi_2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{-mv_\perp}{T}+\frac{i}{\Omega}\,k_\perp^{(2)}\sin(\theta'-\varphi_2)\right)\right]+\left(-\sin\theta'+\frac{v_\parallel k_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\sin\theta'+\frac{v_\perp k_\perp^{(1)}\sin\varphi_1}{\omega_1}\right)\left(\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J_n'^{(2)}i\sin\varphi_2\right)\times$$

$$\times\left[\frac{i}{\Omega}\,k_\perp^{(2)}v_\perp\cos(\theta'-\varphi_2)-in\right]\Bigg\}+$$

$$E_x(k_1)E_y(k_2)\Bigg\{\frac{v_\perp k_\parallel^{(1)}\cos\theta'}{\omega_1}\,v_\perp\left[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\cdot\sin\varphi_2+J_n'^{(2)}i\cos\varphi_2\right]\left(\frac{-mv_\parallel}{T}+\frac{k_\parallel^{(2)}}{X_n^{(2)}}\right)+$$

$$\cos\theta'\left(1-\frac{v_\parallel k_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\left[nJ_n'^{(2)}\sin\varphi_2+J_n'^{(2)}i\cos\varphi_2+J_n''^{(2)}\,\frac{k_\perp^{(2)}v_\perp}{\Omega}\cdot i\cos\varphi_2+v_\perp\left[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\sin\varphi_2+J_n'^{(2)}i\cos\varphi_2\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{-mv_\perp}{T}+\frac{i}{\Omega}\,k_\perp^{(2)}\sin(\theta'-\varphi_2\right]\right]+\left(-\sin\theta'+\frac{v_\parallel k_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\sin\theta'+\frac{v_\perp k_\perp^{(1)}\sin\varphi_1}{\omega_1}\right)\left(\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\sin\varphi_2+J_n'^{(2)}i\cos\varphi_2\right)\times$$

$$\times\left[\frac{i}{\Omega}\,k_\perp v_\perp\cos(\theta'-\varphi_2)-in\right]\Bigg\}+$$

$$E_y(k_1)E_\parallel(k_2)\Bigg\{\frac{v_\perp k_\parallel^{(1)}\sin\theta}{\omega_1}\left[\frac{-mv_\parallel^2}{T}\,J_n^{(2)}+\frac{k_\parallel^{(2)}J_n^{(2)}v_\parallel}{X_n^{(2)}}+J_n^{(2)}\right]+\sin\theta'\left(1-\frac{v_\parallel k_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\left[\frac{-mv_\perp v_\parallel}{T}\,J_n^{(2)}+\frac{iJ_n^{(2)}v_\parallel k_\perp^{(2)}\sin(\theta'-\varphi_2)}{\Omega}\right.$$

$$\left.+\frac{k_\perp^{(2)}v_\parallel}{\Omega}\,J_n'^{(2)}\right]+\left[\cos\theta'-\frac{v_\parallel k_\parallel^{(1)}\cos\theta'}{\omega_1}-\frac{v_\perp k_\perp^{(1)}}{\omega_1}\cos\varphi_1\right]\frac{J_n^{(2)}v_\parallel}{v_\perp}\left[\frac{i}{\Omega}\,k_\perp v_\perp\cos(\theta'-\varphi_2)-in\right]$$

$$E_y(k_1)E_x(k_2)\Bigg\{\frac{v_\perp k_\parallel^{(1)}\sin\theta'}{\omega_1}\left[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J_n'^{(2)}i\sin\varphi_2\right]v_\perp\left(\frac{-mv_\parallel}{T}+\frac{k_\parallel^{(2)}}{X_n^{(2)}}\right)+$$

$$+\sin\theta'\left(1-\frac{v_\parallel k_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\left[nJ_n'^{(2)}\cos\varphi_2-J_n'^{(2)}i\sin\varphi_2-J_n''^{(2)}\cdot\frac{k_\perp^{(2)}v_\perp}{\Omega}\,i\sin\varphi_2+v_\perp\left[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J_n'^{(2)}i\sin\varphi_2\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{-mv_\perp}{T}+\frac{i\,k_\perp^{(2)}}{\Omega}\sin(\theta'-\varphi_2)\right]\right]+\left[\cos\theta'-\frac{v_\parallel k_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\cos\theta'-\frac{v_\perp k_\perp^{(1)}}{\omega_1}\cos\varphi_1\right]\times\cdot$$

$$\times\left(\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J_n'^{(2)}i\sin\varphi_2\right)\cdot\left(\frac{i}{\Omega}\,k_\perp^{(2)}v_\perp\cos(\theta'-\varphi_2)-in\right)\Bigg\}+$$

$$E_y(k_1)E_y(k_2)\Bigg\{\frac{v_\perp k_\parallel^{(1)}\sin\theta'}{\omega_1}\left[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp}\,J_n^{(2)}\sin\varphi_2+J_n'^{(2)}i\cos\varphi_2\right]\left(\frac{-mv_\parallel}{T}+\frac{k_\parallel^{(2)}}{X_n^{(2)}}\right)v_\perp+$$

$$\sin\theta'\left(1-\frac{v_{11}k_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right)\cdot\left[m\cdot J'^{(2)}_m \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2 + J''^{(2)}_m \frac{k_\perp^{(2)}v_\perp}{\Omega}\, i\cos\varphi_2 + \right.$$

$$+ v_\perp\left[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp} J^{(2)}_n \cdot \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2\right]\left[\frac{-mv_\perp}{T} + \frac{i}{\Omega} k_\perp^{(2)} \sin(\theta'-\varphi_2)\right]+$$

$$\left. + \left[\cos\theta' - \frac{v_{11}k_{11}^{(1)}\cos\theta'}{\omega_1} - \frac{v_\perp k_\perp^{(1)}}{\omega_1}\cos\varphi_1\right]\cdot\left[\frac{n\Omega}{k_\perp^{(2)}v_\perp} J^{(2)}_n \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2\right]\cdot\left[\frac{i}{\Omega} k_\perp^{(2)} v_\perp \cos(\theta'-\varphi_2) - in\right]\right\}$$

Afin de pouvoir intégrer cette expression par rapport à θ' il nous faut rassembler toutes les fonctions de θ' en une seule fonction. Pour cela nous allons développer $e^{\frac{i}{\Omega}\tilde{k}_\perp v_\perp \sin(\theta'-\varphi_{20})}$ en série de fonctions de Bessel :

$$e^{\frac{i}{\Omega}\tilde{k}_\perp v_\perp \sin(\theta'-\varphi_{20})} = \sum_m J_m\left(\frac{\tilde{k}_\perp v_\perp}{\Omega}\right) e^{im(\theta'-\varphi_{20})}$$

On doit ensuite faire les substitutions suivantes :

$$\cos(\theta'-\varphi_1) = \frac{1}{2}\left(e^{i(\theta'-\varphi_1)} + e^{-i(\theta'-\varphi_1)}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\left[J_{m-1}e^{i(\varphi_{20}-\varphi_1)} + J_{m+1}e^{-i(\varphi_{20}-\varphi_1)}\right]$$

$$\cos(\theta'-\varphi_i)\sin(\theta'-\varphi_j) = \frac{1}{4i}\left[e^{2i\theta'-i(\varphi_i+\varphi_j)} - e^{-2i\theta'+i(\varphi_i+\varphi_j)} + 2i\sin(\varphi_i-\varphi_j)\right]$$

$$\longrightarrow \frac{1}{4i}\left[J_{m-2}e^{i(2\varphi_{20}-\varphi_i-\varphi_j)} - J_{m+2}e^{-i(2\varphi_{20}-\varphi_i-\varphi_j)} + 2iJ_m\sin(\varphi_i-\varphi_j)\right]$$

et par conséquent on a :

$$\cos(\theta'-\varphi_1)\sin(\theta'-\varphi_2) \to \frac{1}{4i}\left[J_{m-2}e^{i(2\varphi_{20}-\varphi_1-\varphi_2)} - J_{m+2}e^{-i(2\varphi_{20}-\varphi_1-\varphi_2)} + 2iJ_m\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

$$\sin(\theta'-\varphi_1)\cos(\theta'-\varphi_2) \to \frac{1}{4i}\left[J_{m-2}e^{i(2\varphi_{20}-\varphi_1-\varphi_2)} - J_{m+2}e^{-i(2\varphi_{20}-\varphi_1-\varphi_2)} - 2iJ_m\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

$$\cos\theta' \to \frac{1}{2}\left(J_{m-1}e^{i\varphi_{20}} + J_{m+1}e^{-i\varphi_{20}}\right) \quad \text{et} \quad \sin\theta' \to \frac{1}{2i}\left(J_{m-1}e^{i\varphi_{20}} - J_{m+1}e^{-i\varphi_{20}}\right)$$

$$\cos\theta'\sin(\theta'-\varphi_2) \to \frac{1}{4i}\left(J_{m-2}e^{i(2\varphi_{20}-\varphi_2)} + J_{m+2}e^{-i(2\varphi_{20}-\varphi_2)} - 2iJ_m\sin\varphi_2\right)$$

$$\sin\theta'\cos(\theta'-\varphi_2) \to \frac{1}{4i}\left(J_{m-2}e^{i(2\varphi_{20}-\varphi_2)} - J_{m+2}e^{-i(2\varphi_{20}-\varphi_2)} + 2iJ_m\sin\varphi_2\right)$$

$$\sin\theta'\sin(\theta'-\varphi_2) \to -\frac{1}{4}\left(J_{m-2}e^{i(2\varphi_{20}-\varphi_2)} + J_{m+2}e^{-i(2\varphi_{20}-\varphi_2)} - 2J_m\cos\varphi_2\right)$$

$$\cos\theta'\cos(\theta'-\varphi_2) \to \frac{1}{4}\left(J_{m-2}e^{i(2\varphi_{20}-\varphi_2)} + J_{m+2}e^{-i(2\varphi_{20}-\varphi_2)} + 2J_m\cos\varphi_2\right)$$

D. Calcul du courant du deuxième ordre J_2 et expression de la conductivité non linéaire $\sigma^{ij}_{k k_1 k_2}$.

Posons égal à $\frac{\partial^2 f_2}{\partial E_i(\kappa_1)\,\partial E_j(\kappa_2)}$ les coefficients de $E_i(\kappa_1)\,E_j(\kappa_2)$. On a alors pour f_2 une expression de la forme :

$$f_2 = \frac{pe^2 i}{m\Omega T}\, e^{\frac{i}{\Omega}k_\perp v_\perp \sin(\delta\ \ ) + \frac{i}{\Omega}(k_{11}v_{11}-\omega)\theta} f_0 \int_{-\infty}^{\theta} d\theta' \int d\kappa_{12}\,\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,d\omega_{12}\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\cdot\sum_m J_m\left(\frac{\tilde{k}_\perp v_\perp}{\Omega}\right)\cdot$$

$$\cdot e^{im\theta'-im\varphi_{20}-\frac{i}{\Omega}\theta'(k_{11}v_{11}-\omega)} \sum_n \frac{e}{\chi_n^{(2)}}\, E^i_{\omega_1} E^j_{\kappa_2} \frac{\partial^2 f_2\left(\cos(\theta'-\varphi_1), \sin(\theta'-\varphi_1), \ldots J_n\right)}{\partial E^i_{\omega_1}\,\partial E^j_{\kappa_2}}$$

Les fonctions trigonométriques contenues dans $\frac{\partial^2 f_2}{\partial E_i \partial E_j}$ peuvent être éliminées au moyen des transformations indiquées précédemment et on trouve, en posant égal à $\frac{\partial^2 \hat{f}_2}{\partial E_i \partial E_j}$ l'expression de $\frac{\partial^2 f_2}{\partial E_i \partial E_j}$ dans laquelle on a fait ces transformations :

$$f_2 = \frac{\beta e^2 i}{m \Omega T} e^{\frac{i}{\Omega} \kappa_\perp v_\perp \sin(\theta-\varphi) + \frac{i}{\Omega}(\kappa_\parallel v_\parallel - \omega)\theta} f_0 \int_{-\infty}^{\theta} d\theta' \int d\kappa_{12}\, \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2) \sum_m e^{im\theta' - im\varphi_{20}} e^{-\frac{i}{\Omega}\theta'(\kappa_\parallel v_\parallel - \omega)} \cdot$$

$$\cdot \sum_n \frac{e^{-in(\theta'-\varphi_2)}}{X_n^{(2)}} E^i_{\kappa_1} E^j_{\kappa_2} \frac{\partial^2 \hat{f}_2\left(J_{m-q}\left(\frac{\tilde{\kappa}_\perp v_\perp}{\Omega}\right) e^{iq\varphi_{20}}, \dots, J_n\right)}{\partial E^i_{\kappa_1} \partial E^j_{\kappa_2}}$$

En intégrant cette expression en θ' il vient alors :

$$f_2 = \frac{\beta e^2 i}{m \Omega T} e^{\frac{i}{\Omega} \kappa_\perp v_\perp \sin(\theta-\varphi)} \frac{\Omega}{i} e^{\frac{i}{\Omega}(\kappa_\parallel v_\parallel - \omega)\theta} f_0 \int d\kappa_{12}\, \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2) \sum_m \frac{e^{-im\varphi_{20}} e^{im\theta} e^{-\frac{i}{\Omega}\theta(\kappa_\parallel v_\parallel - \omega)}}{(m-n)\Omega - \kappa_\parallel v_\parallel + \omega} \cdot$$

$$\cdot \sum_n \frac{e^{-in(\theta-\varphi_2)}}{X_n^{(2)}} E^i_{\kappa_1} E^j_{\kappa_2} \frac{\partial^2 \hat{f}_2\left(J_{m-q}\left(\frac{\tilde{\kappa}_\perp v_\perp}{\Omega}\right) e^{iq\varphi_{20}}, \dots J_n\right)}{\partial E^i_{\kappa_1} \partial E^j_{\kappa_2}}$$

formule qui en se simplifiant et en regroupant les termes devient :

$$f_2 = \frac{\beta e^2}{m^2 T} e^{\frac{i}{\Omega} \kappa_\perp v_\perp \sin(\theta-\varphi)} f_0 \int d\kappa_{12}\, \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2) \sum_{m,n} \frac{e^{-im\varphi_{20}} e^{in\varphi_2} e^{i(m-n)\theta}}{\left[\Omega(m-n) - \kappa_\parallel v_\parallel + \omega\right] X_n^{(2)}} E^i_{\kappa_1} E^j_{\kappa_2} \frac{\partial^2 \hat{f}_2\left(\tilde{J}_{m-q} e^{iq\varphi_{20}}, \dots J_n\right)}{\partial E^i_{\kappa_1} \partial E^j_{\kappa_2}}$$

La contribution correspondante au courant J_2 s'écrit :

$$\vec{J}_2(\kappa,\omega) = e \int \vec{v} \cdot f_2\, d^3v = e \int dv_\parallel \int_0^\infty dv_\perp \int_0^{2\pi} \left[v_\perp (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) + v_\parallel \vec{h} \right] f_2\, d\theta$$

et par conséquent en remplaçant f_2 par la valeur trouvée on trouve : (nous n'explicitons pas l'interprétation sur ω_1 et ω_2)

$$\vec{J}_2(\kappa,\omega) = \frac{\beta e^3}{mT} \int d\kappa_{12}\, \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2) \int dv_\parallel \int_0^\infty dv_\perp \int_0^{2\pi} d\theta \left[v_\perp (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) + v_\parallel \vec{h} \right] v_\perp f_0 \sum_{m,n} \frac{e^{-im\varphi_{20}} e^{in\varphi_2} e^{i(m-n)\theta}}{\left[\Omega(m-n) - \kappa_\parallel v_\parallel + \omega\right] X_n^{(2)}} \cdot$$

$$\cdot e^{\frac{i}{\Omega} \kappa_\perp v_\perp \sin(\theta-\varphi)} E^i_{\kappa_1} E^j_{\kappa_2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{f}_2\left(\tilde{J}_{m-q} e^{iq\varphi_{20}}, \dots, J_n\right)}{\partial E^i_{\kappa_1} \partial E^j_{\kappa_2}}$$

Pour intégrer par rapport à θ on doit à nouveau utiliser le développement $e^{\frac{i}{\Omega} \kappa_\perp v_\perp \sin(\theta-\varphi)} = \sum_p J_p\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right) e^{ip(\theta-\varphi)}$

et ensuite remplacer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par des expression du type $\frac{1}{2}\left(J_{p-1} e^{i\varphi} + J_{p+1} e^{-i\varphi}\right)$ et $\frac{1}{2i}\left(J_{p-1} e^{i\varphi} - J_{p+1} e^{-i\varphi}\right)$

L'intégration par rapport à θ est alors immédiate et donne la seule solution non nulle $p = n-m$

D'où pour J_2 :

$$\vec{J}_2(\kappa,\omega)=\int d\kappa_{12}\,\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\int dv_{11}\int_0^\infty dv_\perp\, f_0(v_{11})f_0(v_\perp)\sum_{m,n}\frac{\vec{I}_{m-n}\,e^{-im\varphi_{20}}e^{in\varphi_2}e^{-(n-m)\varphi}}{[\Omega(m-n)-\kappa_{11}v_{11}+\omega][\omega_2-\kappa_{11}^{(2)}v_{11}-n\Omega]}E^i_{\kappa_1}E^j_{\kappa_2}\frac{\partial^2\hat{f}_2(\tilde{J}_m e^{im\varphi_{20}},\dots J_n)}{\partial E^i_{\kappa_1}\partial E^j_{\kappa_2}}\frac{\beta e^3}{mT}$$

avec $$\vec{I}_{m-n}=v_\perp\left\{\frac{v_\perp\vec{i}}{2}\left[J_{m-n-1}\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right)e^{i\varphi}+J_{m-n+1}\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right)e^{-i\varphi}\right]+\frac{v_\perp\vec{j}}{2i}\left[J_{m-n-1}\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right)e^{i\varphi}-J_{m-n-1}\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right)e^{-i\varphi}\right]+J_{m-n}\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right)v_{11}\vec{h}\right\}$$

posons $$\frac{\partial^2\hat{J}_2(n,m)}{\partial E^i_{\kappa_1}\partial E^j_{\kappa_2}}=\int dv_{11}\int_0^\infty dv_\perp\, f_0(v_{11})\,f_0(v_\perp)\,\frac{\vec{I}_{m-n}\,e^{im(\varphi-\varphi_{20})}e^{in(\varphi_2-\varphi)}}{[\Omega(m-n)-\kappa_{11}v_{11}+\omega][\omega_2-\kappa_{11}^{(2)}v_{11}-n\Omega]}\,\frac{\partial^2\hat{f}_2(\tilde{J}_m e^{im\varphi_{20}},\dots J_n)}{\partial E^i_{\kappa_1}\partial E^j_{\kappa_2}}$$

et $$\vec{\sigma}^{ij}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}=\sum_{n,m}\frac{\partial^2\hat{J}_2(n,m)}{\partial E^i_{\kappa_1}\partial E^j_{\kappa_2}}\frac{\beta e^3}{mT}$$ c-a-d $$\vec{J}_2(\kappa,\omega)=\int d\kappa_{12}d\omega_{12}\,\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\vec{\sigma}^{ij}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}E_i(\kappa_1)E_j(\kappa_2)$$

alors les différentes composantes de $\frac{\partial^2\hat{J}_2}{\partial E^i_{\kappa_1}\partial E^j_{\kappa_2}}$ suivant les valeurs de i et j vont successivement s'écrire en choisissant φ nul, c'est-à-dire des axes pour lesquel $\vec{K}$ est dans le plan x o z

$$\frac{\partial^2\hat{J}_2}{\partial E_{11}(\kappa_1)\partial E_{11}(\kappa_2)}=\int_0^\infty dv_\perp\int dv_{11}\,\frac{\vec{I}_{m-n}\,f_0(v_{11})f_0(v_\perp)e^{im\varphi_{20}}e^{in\varphi_2}}{[\omega-\kappa_{11}v_{11}+\Omega(m-n)][\omega_2-\kappa_{11}^{(2)}v_{11}-n\Omega]}\left\{\left[\tilde{J}_m-\frac{v_\perp\kappa_\perp^{(1)}}{2\omega_1}(\tilde{J}_{m-1}e^{-i\varphi_1}+\tilde{J}_{m+1}e^{i\varphi_1})\right]\left[\frac{-mv_{11}^2}{T}J_n^{(2)}+J_n^{(\omega)}\frac{v_{11}\kappa_{11}}{X_n^{(2)}}+J_n^{(2)}\right]+\right.$$

$$+\frac{v_{11}\kappa_\perp^{(1)}}{2\omega_1}(\tilde{J}_{m-1}e^{-i\varphi_1}+\tilde{J}_{m+1}e^{i\varphi_1})\left(\frac{-mv_\perp v_{11}}{T}J_n^{(2)}+\frac{\kappa_\perp^{(2)}v_{11}}{\Omega}J'^{(2)}_n\right)+\frac{v_{11}^2\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\cdot J_n^{(2)}\cdot\frac{\kappa_\perp^{(2)}}{4\Omega}\left(\tilde{J}_{m-2}e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}-\tilde{J}_{m+2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}+2i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\tilde{J}_m\right)+$$

$$J_n^{(2)}\frac{v_{11}^2}{v_\perp}\frac{\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp^2 v_\perp\left(\tilde{J}_{m-2}e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}-\tilde{J}_{m+2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}+2i\sin(\varphi_2-\varphi_1)\tilde{J}_m\right)-\frac{nv_{11}^2\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}J_n^{(2)}\left(\tilde{J}_{m-1}e^{-i\varphi_1}-\tilde{J}_{m+1}e^{i\varphi_1}\right)$$

Nous avons posé : $$\tilde{J}_{m+q}=J_{m+q}\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right)e^{-iq\varphi_{20}}$$

$$\frac{\partial^2\hat{J}_2(n,m)}{\partial E_{11}(\kappa_1)\partial E_{22}(\kappa_2)}=\int_0^\infty dv_\perp\int dv_{11}\,\frac{\vec{I}_{m-n}\,f_0(v_{11})f_0(v_\perp)e^{im\varphi_{20}}e^{in\varphi_2}}{[\omega-\kappa_{11}v_{11}+(m-n)\Omega][\omega_2-\kappa_{11}^{(2)}v_{11}-n\Omega]}\left\{\left[\tilde{J}_m-\frac{1}{2}(\tilde{J}_{m-1}e^{-i\varphi_1}+\tilde{J}_{m+1}e^{i\varphi_1})\frac{v_\perp\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\right]v_\perp\left(\frac{-mv_{11}}{T}+\frac{\kappa_{11}^{(2)}}{X_n^{(2)}}\right)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J'^{(2)}_n i\sin\varphi_2\right)+\frac{v_{11}\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\frac{1}{2}(\tilde{J}_{m-1}e^{-i\varphi_1}+\tilde{J}_{m+1}e^{i\varphi_1})\left[nJ'^{(2)}_n\cos\varphi_2-J'^{(2)}_n i\sin\varphi_2-J''^{(2)}_n\frac{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}{\Omega}i\sin\varphi_2-\right.$$

$$-\frac{mv_\perp}{T}v_\perp\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J'^{(2)}_n i\sin\varphi_2\right)\Big]+\frac{v_{11}\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\frac{v_\perp i\kappa_\perp^{(2)}}{\Omega}\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J'^{(2)}_n i\sin\varphi_2\right)\frac{1}{4i}\left(\tilde{J}_{m-2}e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}-\tilde{J}_{m+2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}+2i\tilde{J}_m\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

$$+\frac{v_{11}\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}v_\perp\left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J'^{(2)}_n i\sin\varphi_2\right]\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp^{(2)}v_\perp\frac{1}{4i}\left(\tilde{J}_{m-2}e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}-\tilde{J}_{m+2}e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}-2i\tilde{J}_m\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)+$$

$$\left.+in v_\perp\frac{v_{11}\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}J_n^{(2)}\cos\varphi_2-J'^{(2)}_n i\sin\varphi_2\right]\frac{1}{2i}\left(\tilde{J}_{m-1}e^{-i\varphi_1}-\tilde{J}_{m+1}e^{i\varphi_1}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2\hat{J}_2(n,m)}{\partial E_{11}(\kappa_1)\partial E_y(\kappa_2)}=\int_0^\infty dv_\perp\int dv_{11}\,\frac{\vec{I}_{m-n}\,f_0(v_{11})f_0(v_\perp)e^{im\varphi_{20}}e^{in\varphi_2}}{[\omega-\kappa_{11}v_{11}+(m-n)\Omega][\omega_2-\kappa_{11}^{(2)}v_{11}-n\Omega]}\left\{\left[\tilde{J}_m-\frac{1}{2}(\tilde{J}_{m-1}e^{-i\varphi_1}+\tilde{J}_{m+1}e^{i\varphi_1})\frac{v_\perp\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\right]v_\perp\times\right.$$

$$\times\left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}J_n^{(2)}\sin\varphi_2+J'^{(2)}_n i\cos\varphi_2\right]\left(\frac{-mv_{11}}{T}+\frac{\kappa_{11}^{(2)}}{X_n^{(2)}}\right)+\frac{v_{11}\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\frac{1}{2}(\tilde{J}_{m-1}e^{-i\varphi_1}+\tilde{J}_{m+1}e^{i\varphi_1})\cdot$$

$$\cdot\left[nJ'^{(2)}_n\sin\varphi_2+J'^{(2)}_n i\cos\varphi_2+J''^{(2)}_n\frac{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}{\Omega}i\cos\varphi_2-\frac{mv_\perp^2}{T}\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}J_n^{(2)}\sin\varphi_2+J'^{(2)}_n i\cos\varphi_2\right)\right]+$$

$$+\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp^{(2)}\frac{v_{11}\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\frac{1}{4i}\left(\tilde{J}_{m-2}e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}-\tilde{J}_{m+2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}+2i\tilde{J}_m\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)v_\perp\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}J_n^{(2)}\sin\varphi_2+J'^{(2)}_n i\cos\varphi_2\right)+$$

$$+\frac{v_{11}\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}v_\perp\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp^{(2)}v_\perp\left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}J_n^{(2)}\sin\varphi_2+J'^{(2)}_n i\cos\varphi_2\right]\frac{1}{4i}\left[\tilde{J}_{m-2}e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}-\tilde{J}_{m+2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}-2i\tilde{J}_m\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]+$$

$$\left.-in\frac{v_{11}\kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}v_\perp\left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)}v_\perp}J_n^{(2)}\sin\varphi_2+J'^{(2)}_n i\cos\varphi_2\right]\frac{1}{2i}\left[\tilde{J}_{m-1}e^{-i\varphi_1}-\tilde{J}_{m+1}e^{i\varphi_1}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\tilde{J}}_z(m,n)}{\partial E_x(\kappa_1)\,\partial E_{11}(\kappa_2)} = \int_0^\infty dv_\perp \int dv_{11}\, \frac{\vec{\tilde{I}}_{m-n}\, f_0(v_{11})\, f_0(v_\perp)\, e^{im\varphi_{20}}\, e^{in\varphi_2}}{[\omega - \kappa_{11}v_{11} + (m-n)\Omega][\omega_2 - \kappa_{11}^{(2)}v_{11} - n\Omega]} \cdot \Bigg\{ \frac{1}{2}\left(\tilde{J}_{m-1} + \tilde{J}_{m+1}\right)\Bigg(\frac{v_\perp \kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\Bigg(\frac{\kappa_{11}^{(2)} J_n^{(2)} v_{11}}{\chi_n^{(2)}} +$$

$$+ J_n^{(2)}\Bigg) - \frac{m v_\perp v_{11}}{T} J_n^{(2)} + \left(1 - \frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right)\frac{\kappa_\perp^{(2)} v_{11}}{\Omega} J'^{(2)}_n\Bigg) + \left(1 - \frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right) i\, \frac{J_n^{(2)} v_{11}\kappa_\perp^{(2)}}{\Omega}\, \frac{1}{4i}\left(\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} + \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} - 2i\tilde{J}_m \sin\varphi_2\right) +$$

$$+ \frac{1}{4i}\left(\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} - \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} + 2i\tilde{J}_m \sin\varphi_2\right)\left(\frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1} - 1\right)\frac{J_n^{(2)} v_{11}}{v_\perp}\, \frac{i}{\Omega}\, \kappa_\perp^{(2)} v_\perp - in\left(\frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1} - 1\right)\frac{J_n^{(2)} v_{11}}{v_\perp}\, \frac{1}{2i}\left(\tilde{J}_{m-1} - \tilde{J}_{m+1}\right) +$$

$$+ \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)} \sin\varphi_2}{\omega_1}\, \frac{J_n^{(2)} v_{11}}{v_\perp}\, \frac{i}{\Omega}\, \kappa_\perp^{(2)} v_\perp\, \frac{1}{2}\left[\tilde{J}_{m-1} e^{-i\varphi_1} + \tilde{J}_{m+1} e^{i\varphi_1}\right] - in\, \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)} \sin\varphi_1}{\omega_1}\, \frac{J_n^{(2)} v_{11}}{v_\perp} \cdot \tilde{J}_m$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\tilde{J}}_z(m,n)}{\partial E_x(\kappa_1)\,\partial E_x(\kappa_2)} = \int_0^\infty dv_\perp \int dv_{11}\, \frac{\vec{\tilde{I}}_{m-n}\, f_0(v_{11})\, f_0(v_\perp)\, e^{im\varphi_{20}}\, e^{in\varphi_2}}{[\omega - \kappa_{11}v_{11} + (m-n)\Omega][\omega_2 - \kappa_{11}^{(2)}v_{11} - n\Omega]} \cdot \Bigg\{ \frac{1}{2}\left(\tilde{J}_{m-1} + \tilde{J}_{m+1}\right)\cdot\Bigg[\frac{v_\perp \kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\Bigg(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 -$$

$$- J'^{(2)}_n \sin\varphi_2\Bigg) v_\perp \left(\frac{-m v_{11}}{T} + \frac{\kappa_{11}^{(2)}}{\chi_n^{(2)}}\right) + \left(1 - \frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right)\Bigg[n J'^{(2)}_n \cos\varphi_2 - J'^{(2)}_n\, i\sin\varphi_2 - J''^{(2)}_n \frac{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp}{\Omega}\, i\sin\varphi_2 +$$

$$+ v_\perp\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J'^{(2)}_n\, i\sin\varphi_2\right)\left(\frac{-m v_\perp}{T}\right)\Bigg] + \left(1 - \frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right) v_\perp \left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J'^{(2)}_n\, i\sin\varphi_2\right)\times$$

$$\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp^{(2)}\, \frac{1}{4i}\left(\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} + \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} - 2i\tilde{J}_m \sin\varphi_2\right) + \left(\frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1} - 1\right)\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J'^{(2)}_n\, i\sin\varphi_2\right)\times$$

$$\times \frac{i}{\Omega} k_\perp v_\perp\, \frac{1}{4i}\left(\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} + \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} + 2i\tilde{J}_m \sin\varphi_2\right) - in\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J'^{(2)}_n\, i\sin\varphi_2\right)\left(\frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1} - 1\right)\frac{1}{2i}\left(\tilde{J}_{m-1} - \tilde{J}_{m+1}\right)$$

$$-in\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J'^{(2)}_n \sin\varphi_2\right)\frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)} \sin\varphi_1}{\omega_1} \cdot \tilde{J}_m \,.$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\tilde{J}}_z(m,n)}{\partial E_x(\kappa_1)\,\partial E_y(\kappa_2)} = \int_0^\infty dv_\perp \int dv_{11}\, \frac{\vec{\tilde{I}}_{m-n}\, f_0(v_{11})\, f_0(v_\perp)\, e^{im\varphi_{20}}\, e^{in\varphi_2}}{[\omega - \kappa_{11}v_{11} + (m-n)\Omega]\,[\omega_2 - \kappa_{11}^{(2)}v_{11} - n\Omega]} \cdot \Bigg\{ \frac{v_\perp^2 \kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\Bigg[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 +$$

$$+ J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2\Bigg]\left(\frac{-m v_{11}}{T} + \frac{\kappa_{11}^{(2)}}{\chi_n^{(2)}}\right)\left(\tilde{J}_{m-1} + \tilde{J}_{m+1}\right)\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right)\frac{1}{2}\left(\tilde{J}_{m-1} + \tilde{J}_{m+1}\right)\Bigg[n J'^{(2)}_n \sin\varphi_2 +$$

$$+ J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2 + J''^{(2)}_n \frac{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp}{\Omega}\, i\cos\varphi_2 + v_\perp\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2\right)\left(\frac{-m v_\perp}{T}\right) +$$

$$\left(1 - \frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right) v_\perp \left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2\right)\frac{i}{\Omega}\kappa_\perp^{(2)}\, \frac{1}{4i}\left(\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} + \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} - 2i\tilde{J}_m \sin\varphi_2\right) +$$

$$\left(\frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1} - 1\right)\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2\right)\frac{i}{\Omega} k_\perp v_\perp\, \frac{1}{4i}\left(\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} - \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} + 2i\tilde{J}_m \sin\varphi_2\right) -$$

$$-in\left(\frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1} - 1\right)\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2\right)\frac{1}{2i}\left(\tilde{J}_{m-1} - \tilde{J}_{m+1}\right) + \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)} \sin\varphi_1}{\omega_1}\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2\right)\times$$

$$\times \frac{i}{\Omega} k_\perp v_\perp\, \frac{1}{2}\left(J_{m-1} e^{-i\varphi_1} + J_{m+1} e^{i\varphi_1}\right) - in\, \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)} \sin\varphi_1}{\omega_1}\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J'^{(2)}_n\, i\cos\varphi_2\right)\tilde{J}_m$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\tilde{J}}_z(m,n)}{\partial E_y(\kappa_1)\,\partial E_{\pm 1}(\kappa_2)} = \int_0^\infty dv_\perp \int dv_{11}\, \frac{\vec{\tilde{I}}_{m-n}\, f_0(v_{11})\, f_0(v_\perp)\, e^{im\varphi_{20}}\, e^{in\varphi_2}}{[\omega - \kappa_{11}v_{11} + (m-n)\Omega][\omega_2 - \kappa_{11}^{(2)}v_{11} - n\Omega]} \Bigg\{ \frac{1}{2i}\left(\tilde{J}_{m-1} - \tilde{J}_{m+1}\right)\Bigg[\frac{v_\perp \kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\Bigg(\frac{\kappa_{11}^{(2)} J_n^{(2)} v_{11}}{\chi_n^{(2)}} +$$

$$+ J_n^{(2)}\Bigg) + \left(1 - \frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right)\frac{\kappa_\perp^{(2)} v_{11}}{\Omega} J'^{(2)}_n\Bigg] + \left(1 - \frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right) i\, \frac{J_n^{(2)} v_{11}\kappa_\perp^{(2)}}{\Omega}\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} + \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} - 2\tilde{J}_m \cos\varphi_2\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right)\frac{J_n^{(2)} v_{11}}{\Omega}\, \frac{i}{v_\perp}\, \kappa_\perp v_\perp\, \frac{1}{4}\left(J_{m-2} e^{-i\varphi_2} + J_{m+2} e^{i\varphi_2} + 2J_m \cos\varphi_2\right) - in\left(1 - \frac{v_{11}\kappa_{11}^{(1)}}{\omega_1}\right)\frac{J_n^{(2)} v_{11}}{v_\perp}\, \frac{1}{2}\left(\tilde{J}_{m-1} + \tilde{J}_{m+1}\right)$$

$$- \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1} \cos\varphi_1\, \frac{J_n^{(2)} v_{11}}{v_\perp}\, \frac{i}{\Omega}\, k_\perp v_\perp\, \frac{1}{2}\left(\tilde{J}_{m-1} e^{-i\varphi_1} + \tilde{J}_{m+1} e^{i\varphi_1}\right) + in\, \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1}\, \frac{J_n^{(2)} v_{11}}{v_\perp} \cdot \tilde{J}_m \Bigg\}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\hat{J}_2}(m,n)}{\partial E_y(\kappa_1)\partial E_x(\kappa_2)} = \int_0^\infty dv_\perp \int dv_\parallel \frac{\vec{I}_{m-n}\, f_0(v_\parallel) f_0(v_\perp) e^{im\varphi_{20}} e^{in\varphi_2}}{[\omega - \kappa_\parallel v_\parallel + \Omega(m-n)][\omega_2 - \kappa_\parallel^{(2)} v_\parallel - n\Omega]} \Bigg\{ \frac{1}{2i}\left[\tilde{J}_{m-1} - \tilde{J}_{m+1}\right] \frac{v_\perp \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1} \left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - \right.$$

$$- J_n'^{(2)} i \sin\varphi_2 \Big] v_\perp \left(-\frac{m v_\parallel}{T} + \frac{\kappa_\parallel^{(2)}}{\chi_n^{(2)}}\right) + \frac{1}{2i}\left[\tilde{J}_{m-1} - \tilde{J}_{m+1}\right]\left(1 - \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\Big(n J_n'^{(2)} \cos\varphi_2 - J_n'^{(2)} i \sin\varphi_2 - J_n''^{(2)} \frac{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp}{\Omega} i \sin\varphi_2 +$$

$$+ v_\perp \left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J_n'^{(2)} i \sin\varphi_2\right)\left(-\frac{m v_\perp}{T}\right) + \left(1 - \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right) v_\perp \frac{i\kappa_\perp^{(2)}}{\Omega}\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J_n'^{(2)} i \sin\varphi_2\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} + \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} - 2\tilde{J}_m \cos\varphi_2\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} + \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} + 2\tilde{J}_m \cos\varphi_2\right)\left(1 - \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J_n'^{(2)} i \sin\varphi_2\right) \frac{i}{\Omega} \kappa_\perp^{(2)} v_\perp -$$

$$- in \left(1 - \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J_n'^{(2)} i \sin\varphi_2\right) \frac{1}{2}\left(\tilde{J}_{m-1} + \tilde{J}_{m+1}\right) - \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1} \cos\varphi_1 \left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J_n'^{(2)} \sin\varphi_2\right) \times$$

$$\times \frac{i}{\Omega} \kappa_\perp^{(2)} v_\perp \left[\tilde{J}_{m-1} e^{-i\varphi_2} + \tilde{J}_{m+1} e^{-i\varphi_2}\right] \frac{1}{2} + \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1} \cos\varphi_1 \left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \cos\varphi_2 - J_n'^{(2)} i \sin\varphi_2\right) in . \tilde{J}_m .$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\hat{J}_2}(m,n)}{\partial E_y(\kappa_1)\partial E_y(\kappa_2)} = \int_0^\infty dv_\perp \int dv_\parallel \frac{\vec{I}_{m-n}\, f_0(v_\parallel) f_0(v_\perp) e^{im\varphi_{20}} e^{in\varphi_2}}{[\omega - \kappa_\parallel v_\parallel + \Omega(m-n)][\omega_2 - \kappa_\parallel^{(2)} v_\parallel - n\Omega]} \Bigg\{ \frac{1}{2i}\left[\tilde{J}_{m-1} - \tilde{J}_{m+1}\right] \frac{v_\perp \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1} \left[\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + \right.$$

$$+ J_n'^{(2)} i \cos\varphi_2 \Big]\left(\frac{-m v_\parallel}{T} + \frac{\kappa_\parallel^{(2)}}{\chi_n^{(2)}}\right) v_\perp + \frac{1}{2i}\left[\tilde{J}_{m-1} - \tilde{J}_{m+1}\right]\left(1 - v_\parallel \frac{\kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\Big[n J_n'^{(2)} \sin\varphi_2 + J_n'^{(2)} i \cos\varphi_2 +$$

$$+ J_n''^{(2)} \frac{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp}{\Omega} i \cos\varphi_2 + v_\perp \left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J_n'^{(2)} i \cos\varphi_2\right)\left(\frac{-m v_\perp}{T}\right) \Big] +$$

$$+ \left(1 - \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right) \frac{i}{\Omega} \kappa_\perp^{(2)} v_\perp \left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J_n'^{(2)} i \sin\varphi_2\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} + \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} - 2\tilde{J}_m \cos\varphi_2\right) +$$

$$+ \left[\tilde{J}_{m-2} e^{-i\varphi_2} + \tilde{J}_{m+2} e^{i\varphi_2} + 2\tilde{J}_m \cos\varphi_2\right] \frac{1}{4}\left(1 - \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J_n'^{(2)} i \cos\varphi_2\right) \frac{i}{\Omega} \kappa_\perp^{(2)} v_\perp -$$

$$- \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1} \cos\varphi_1 \left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J_n'^{(2)} i \cos\varphi_2\right) \frac{i}{\Omega} \kappa_\perp^{(2)} v_\perp \frac{1}{2}\left(\tilde{J}_{m-1} e^{-i\varphi_1} + \tilde{J}_{m+1} e^{i\varphi_1}\right) -$$

$$\left. - in \left(\frac{n\Omega}{\kappa_\perp^{(2)} v_\perp} J_n^{(2)} \sin\varphi_2 + J_n'^{(2)} i \cos\varphi_2\right)\Big[\left(1 - \frac{v_\parallel \kappa_\parallel^{(1)}}{\omega_1}\right)\left(\tilde{J}_{m-1} + \tilde{J}_{m+1}\right)\frac{1}{2} - \tilde{J}_m \frac{v_\perp \kappa_\perp^{(1)}}{\omega_1} \cos\varphi_1 \Big] \right\}$$

Les expressions que nous avons écrites exigent encore l'intégration sur $v_\perp$ et $v_\parallel$.

Nous donnons plus loin les intégrations sur $v_\parallel$ des différents types d'intégrales qu'il est possible de rencontrer dans l'expression de $\sigma_{\kappa,\kappa_1,\kappa_2}$. Mais il est à noter que la longueur des expressions fait qu'elles ne sont utilisables que dans certains cas particuliers et qu'il est plus facile de particulariser d'abord le problème pour ensuite calculer les intégrales sur $v_\perp$. Ces dernières sont des intégrales du type :

$$\int_0^\infty J_{m-q}\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right) J_{m-n-q}\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right) J_n\left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega}\right) e^{-\alpha v_\perp^2} v_\perp^p \, dv_\perp$$

Cette expression ne peut être calculée que pour certaines valeurs de n , lorsque par exemple $\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\Omega} << 1$

Nous pourrons en général ne retenir que les fonctions de Bessel d'indice le plus bas. Il est par conséquent préférable de faire d'abord des hypothèses physiques simplificatrices et de calculer ces intégrales après.

Il n'en est pas de même des intégrales en $v_\parallel$ qui sont parfaitement calculables, mais dont le remplacement dans les expressions écrites rallongerait encore davantage les calculs. C'est précisément ce que nous avons fait dans le cas d'un champ magnétique fort et l'intégration sur $v_\parallel$ est donnée en appendice. On peut voir que même dans ce cas particulier, l'expression en est longue.

§ 3. ETUDE DE L'ORDRE DES DIFFERENTS TERMES DE L'EQUATION FONDAMENTALE ET EXPRESSION DE CETTE EQUATION

Nous allons maintenant étudier la perturbation qui permet d'obtenir une équation d'évolution relative à $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$ en ne retenant dans l'équation les termes non linéaire les plus bas, c'est-à-dire les termes de la forme $\langle E^2 \rangle_{k\omega} \langle E^2 \rangle_{k_1\omega_1}$

Comme nous l'avons déjà indiqué on utilise pour cela l'équation du bilan d'énergie :

$$\frac{\partial \langle E^2 \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle B^2 \rangle}{\partial t} + \langle J(E).E \rangle = 0 \qquad (51)$$

D'autre part, au moyen des équations de Mawell on a encore :

$$\left\{ k_i k_j - k^2 \delta_{ij} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right\} E_i = J_{2j}(E) \qquad (52)$$

que nous écrirons en abrégé : $\Pi . E = J_2(E)$ où $\Pi_{ij} = \left\{ k_i k_j - k^2 \delta_{ij} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right\}$ (53)

Si l'on pose $E = E_o + E_1 + \ldots$ et que l'on applique la méthode des itérations à l'équation $\Pi E = J_2(E)$ on arrive pour E_o, E_1, E_2, etc... aux solutions :

1) $\Pi E_o = 0$ qui est la solution classique correspondant aux modes normaux ;

2) $\Pi E_1 = J_2(E_o)$ ou encore $E_1 = \Pi^{-1} J_2(E_o)$

$\Pi E_2 = J_2(E_1) = J_2\left(\Pi^{-1} J_2(E_o)\right)$ ou encore $E_2 = \Pi^{-1} J_2\left(\Pi^{-1} J_2(E_o)\right)$

etc...

On voit que si $J_2(E_o)$ est quadratique en E_o, il en est de même de E_1 et E_2 et du quatrième degré en E_o.

Si donc on utilise le développement de E obtenu à partir de l'itéraction, le courant total J(E) s'écrira :

$$J(E) = J_1(E_o) + J_1(E_1) + J_1(E_2) + \ldots + J_2(E_o) + J_2(E_1) + J_2(E_2) + \ldots + J_3(E_o) + J_3(E_1) + \ldots$$

En tenant compte de ce que $J_1(E_o)$ et $J_2(E_o)$ ont la forme générale suivante :

$$J_1(E_o) = \sigma . E_o$$

et

$$J_2(E_o) = \int \sigma_{k k_1 k_2} E_{ok_1} E_{ok_2} \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \overrightarrow{dk_1} \overrightarrow{dk_2} d\omega_1 d\omega_2$$

(où l'on doit remarquer que $\sigma_{k k_1 k_2} E_{ok_1} E_{ok_2}$ est en fait une combinaison de neuf termes qui s'écrivent $(\sigma_{k k_1 k_2})_{ij} E^i_{ok_1} E^j_{ok_2}$ avec $i, j = 1, 2, 3$. Il n'est cependant pas nécessaire d'expliciter ce fait pour évaluer l'ordre de grandeur des différents termes de la perturbation.)

Si nous nous limitons aux termes de plus bas degré, nous serons amenés à écrire :

$$\langle J(E).E \rangle = \left\langle \left[J_1(E_o) + J_1(E_1) + J_1(E_2) + J_2(E_oE_1) + J_2(E_oE_o) + J_2(E_1E_1) + J_3(E_oE_oE_o) + \ldots \right] \left[E_o + E_1 + E_2 \ldots \right] \right\rangle$$

Dans les calculs qui vont suivre nous allons avoir besoin de l'hypothèse que les phases des amplitudes des différentes ondes sont aléatoires, ce qui signifie que la corrélation entre les phases de deux ondes disparaît complètement au cours d'un temps faible par rapport au temps de variation des grandeurs $\langle E^2_K \rangle$. Ceci nous permet d'écrire que $\langle E^2_{K_1} E^+_{K_2} \rangle = \langle E^2_{K\omega} \rangle \delta(K-K_1)\delta(\omega-\omega_1)$. Mais, d'autre part, nous allons rencontrer des corrélations du troisième et du quatrième ordre. Pour chacune d'entre elles nous allons faire des hypothèses supplémentaires.

Pour les corrélations du troisième ordre nous supposerons qu'elles sont proportionnelles aux corrélations du quatrième ordre (ou plus). Nous verrons de fait que ces termes peuvent être considérés comme négligeables. Pour les termes du quatrième ordre nous aurons :

$$\langle E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_2} E_{o\kappa_3} E_{o\kappa_4} \rangle = E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_2} E_{o\kappa_3} E_{o\kappa_4} \int e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)} D_o(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)\, d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_4$$

Pour $D_o(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ on peut faire l'hypothèse suivante, semblable à celle que l'on fait pour couper la chaîne d'équations dans la hiérarchie BBGKY

$$D_o(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4) = D_o(\varphi_1,\varphi_2) D_o(\varphi_3\varphi_4) + D_o(\varphi_1,\varphi_3) D_o(\varphi_2,\varphi_4) + D_o(\varphi_1\varphi_4) D_o(\varphi_2\varphi_3)$$

Il s'ensuit que l'on pourra écrire :

$$\langle E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_2} E_{o\kappa_3} E_{o\kappa_4} \rangle = \langle E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_2} \rangle \langle E_{o\kappa_3} E_{o\kappa_4} \rangle + \langle E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_3} \rangle \langle E_{o\kappa_2} E_{o\kappa_4} \rangle + \langle E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_4} \rangle \langle E_{o\kappa_2} E_{o\kappa_3} \rangle$$

$$= \langle E^2_{o\kappa_1} \rangle \langle E^2_{o\kappa_3} \rangle \delta(\kappa_1-\kappa_2)\, \delta(\kappa_3-\kappa_4)\, \delta(\omega_1-\omega_2)\, \delta(\omega_3-\omega_4) + \text{etc...}$$

Or, ces corrélations quadruples seront ensuite multipliées par des fonctions δ du type $\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\delta(\kappa+\kappa_3+\kappa_4)$
On voit qu'avec ce type de fonction δ de trois termes il n'en reste plus qu'un, ce qui signifie que les règles de sélection ne nous conserve qu'un seul terme de la décomposition de $\langle E_{\kappa_1} E_{\kappa_2} E_{\kappa_3} E_{\kappa_4} \rangle$

Nous pouvons maintenant étudier l'ordre des différents termes de $\langle J(E).E \rangle$
On a successivement :

1) $$\langle J_1(E_o)\, E_o \rangle = \hat{\sigma}_K \langle E^2_o \rangle_{K\omega}$$

2) $$\langle J_1(E_1)\, E_o \rangle = \sigma . E_1 E_o = \sigma_\kappa \Pi^{-1}_\kappa \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2} \langle E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_2} E_{o-\kappa} \rangle \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\, \vec{d\kappa_1} \vec{d\kappa_2} d\omega_1 d$$

Cette expression est du troisième ordre en E_o et donc on peut la poser proportionnelle au terme du quatrième degré. Ceci se justifie encore par le fait que nous avons comme argument de la fonction δ, $\kappa-\kappa_1-\kappa_2$ ce qui correspond bien à l'interaction de deux ondes et d'une particule, mais la fonction δ n'est pas au carré, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un terme faiblement résonnant.

3) $$\langle J_1(E_o)\, E_1 \rangle = \sigma E_o E_1 = \sigma_\kappa \Pi^{-1}_\kappa \int \sigma_{-\kappa\kappa_1\kappa_2} \langle E^o_{\kappa_1} E^o_{\kappa_2} E^o_\kappa \rangle \delta(\kappa+\kappa_1+\kappa_2)\delta(\omega+\omega_1+\omega_2)\, \vec{d\kappa_1} \vec{d\kappa_2}$$

c'est un terme semblable au précédent.

4) $\langle J_1(E_1)\,E_1\rangle = \sigma E_1 E_1 = \sigma_\kappa \pi^{-1}_\kappa \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2} \langle E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_2} E^{\circ}_{o\kappa'_1} E_{o\kappa'_2}\rangle \pi^{-1}_{-\kappa} \sigma_{-\kappa\kappa'_1\kappa'_2}\, \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\delta(\kappa+\kappa'_1+\kappa'_2)$

en utilisant la condition $\langle E_{\kappa_1} E_{\kappa_2} E_{\kappa_3} E_{\kappa_4}\rangle = \Sigma \langle E_{\kappa_1} E_{\kappa_2}\rangle\langle E_{\kappa_3} E_{\kappa_4}\rangle$ et en éliminant les combinaisons interdites par la sélection on trouve :

$$\langle J_1(E_1)\,E_1\rangle = \sigma_\kappa \pi^{-1}_\kappa \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\, \pi^{-1}_{-\kappa}\, \sigma_{-\kappa-\kappa_1-\kappa_2} \langle E^2_{o\kappa_1}\rangle\langle E^2_{o\kappa_2}\rangle\, \delta^2(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\, d\vec{\kappa}_1\, d\vec{\kappa}_2\, d\omega_1\, d\omega_2$$

Tous les autres termes seront d'ordre supérieur à 4. En effet :

$$\langle J_1(E_2)E_0\rangle = \sigma_\kappa E_2 E_0 = \sigma_\kappa \pi^{-1} \langle J_2(\pi^{-1} J_2(E_0))\,E_0\rangle \sim o(E_0^5)$$

$$\langle J_1(E_2)E_1\rangle \sim o(E_0^6) \qquad \langle J_1(E_2)E_2\rangle \sim o(E_0^8)$$

On voit que le terme (1) correspond à la partie complètement linéaire et dont le comportement a déjà été analysé dans l'introduction. Les termes (2) et (3) sont négligeables en $O(E_0^3)$. Le terme (4) est du quatrième ordre en Eo et sa singularité en δ^2 disparâit du fait de la présence de la moyenne $\langle\ \rangle$

Tous les termes que nous venons d'écrire proviennent du courant $J_1(E)$. Ecrivons-les termes qui proviennent de $J_2(E)$. On a de nouveau, successivement :

1) $\langle J_2(E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_2})\,E_{o\kappa}\rangle = \langle \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2} E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_2} E_{o-\kappa}\, \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\, d\vec{\kappa}_1\, d\vec{\kappa}_2\, d\omega_1\, d\omega_2$

C'est un terme impair en E_o et donc proportionnel à E_o^4

2) $\langle J_2(E_{1\kappa_1} E_{1\kappa_2})\,E_{o-\kappa}\rangle = \langle \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2} \pi^{-1}_{\kappa_1} \sigma_{\kappa_1\kappa'_1\kappa'_2} \bar{E}_{o\kappa'_1} E_{o\kappa'_2} \pi^{-1}_{\kappa_2} \sigma_{\kappa_2\kappa''_1\kappa''_2} E_{o\kappa''_1} E_{o\kappa''_2} E^{\circ}_{-\kappa}\, \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)$

$\cdot\ \delta(\kappa_1-\kappa'_1-\kappa'_2)\,\delta(\kappa_2-\kappa''_1-\kappa''_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\,\delta(\omega_1-\omega'_1-\omega'_2)\,\delta(\omega_2-\omega''_1-\omega''_2)\, d\vec{\kappa}_1\, d\vec{\kappa}_2\, d\vec{\kappa}'_1\, d\vec{\kappa}'_2\, d\vec{\kappa}''_1\, d\vec{\kappa}''_2$

On a de nouveau cic, d'une part une imparité en E_o et, d'autre part, des fonctions δ qui disparaissent c'est donc un terme négligeable en E_o^6

3) $\langle J_2(E_{1\kappa_1} E_{1\kappa_2})\,E_{1-\kappa}\rangle = \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2} \pi^{-1}_{\kappa_1} \sigma_{\kappa_1\kappa'_1\kappa'_2} \pi^{-1}_{\kappa_2} \sigma_{\kappa_2\kappa''_1\kappa''_2} \pi^{-1}_{-\kappa} \sigma_{-\kappa\kappa'''_1\kappa'''_2} \langle E^{\circ}_{\kappa'_1} E^{\circ}_{\kappa'_2} E^{\circ}_{\kappa''_1} E^{\circ}_{\kappa''_2} E^{\circ}_{\kappa'''_1} E^{\circ}_{\kappa'''_2}\rangle$

$\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\delta(\kappa_1-\kappa'_1-\kappa'_2)\,\delta(\kappa_2-\kappa''_1-\kappa''_2)\,\delta(\kappa+\kappa'''_1+\kappa'''_2)$

Par conséquent ce terme est du sixième degré en E_o et dans notre théorie nous le négligeons.

4) $\langle J_2(E_{o\kappa_1} E_{1\kappa_2})\,E_{1-\kappa}\rangle = \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2} \pi^{-1}_{\kappa_2} \sigma_{\kappa_2\kappa'_1\kappa'_2} \pi^{-1}_{-\kappa} \sigma_{-\kappa\kappa''_1\kappa''_2} \langle E^{\circ}_{\kappa_1} E^{\circ}_{\kappa'_1} E^{\circ}_{\kappa'_2} E^{\circ}_{\kappa''_1} E^{\circ}_{\kappa''_2}\rangle \ldots\ldots$

c'est à nouveau un terme du cinquième degré en E_o et on le pose proportionnel à $O(E_o^6)$

Le terme $\langle J_3(E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_2} E_{o\kappa_3})\,E_{o-\kappa}\rangle = \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2\kappa_3} \langle E_{o\kappa_1} E_{o\kappa_2} E_{o\kappa_3} E_{o-\kappa}\rangle\, \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3)\, d\kappa_1\, d\kappa_2\, d\kappa_3$

est bien un terme du quatrième degré en E_o mais correspondant à l'interaction faible de quatre ondes.

Enfin $\langle J_2(E_o E_1)\,E_2\rangle \sim o(E_o^7)$ $\qquad \langle J_2(E_o E_o)\,E_2\rangle \sim o(E_o^6)$ $\qquad \langle J_2(E_1 E_1)\,E_2\rangle \sim o(E_o^8)$

Enfin le terme $\langle J_2(E_{1\kappa_1} E_{o\kappa_2})\,E_{1-\kappa}\rangle$ est semblable au terme (4)

Analysons maintenant les termes qui ne sont pas négligeables :

$$5)\ \langle J_2(E_0E_1)E_0\rangle = \left\langle \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2} E^0_{\kappa_1}\,\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\pi^{-1}_{\kappa_2}\,\sigma_{\kappa_2\kappa'_1\kappa'_2}\,E^0_{\kappa'_1}E^0_{\kappa'_2}\,\delta(\kappa_2-\kappa'_1-\kappa'_2)\,E^0_{-\kappa}\,\vec{d\kappa_1}\vec{d\kappa_2}\vec{d\kappa'_1}\vec{d\kappa'_2}\right\rangle$$

La condition $\langle E^0_{\kappa'_1}E^0_{\kappa'_2}\rangle = \langle E^{02}_{\kappa'_1}\rangle\,\delta(\kappa'_1+\kappa'_2)$ annule K_2 et donne donc un terme négligeable au point de vue interaction d'onde ; la seule condition acceptable est celle qui groupe K_1 et K'_1 ainsi que K'_2 et $-K$
On a alors :

$$\langle E^0_{\kappa_1}E^0_{\kappa'_1}\rangle = \langle E^{02}_{\kappa_1}\rangle\,\delta(\kappa_1+\kappa'_1)\,\delta(\omega_1+\omega'_1) \qquad \langle E^0_{\kappa'_2}E^0_{-\kappa}\rangle = \langle E^{02}_{\kappa}\rangle\,\delta(\kappa'_2-\kappa)\,\delta(\omega'_2-\omega)$$

Par conséquent, on arrive après quelques calculs à l'expression

$$\langle J_2(E_0E_1)E_0\rangle = \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\,\delta^2(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\pi^{-1}_{\kappa_2}\,\sigma_{\kappa_2-\kappa_1\kappa}\,\langle E^2_{0\kappa_1}\rangle\langle E^2_{0\kappa_2}\rangle\,\vec{d\kappa_1}\vec{d\kappa_2}\,d\omega_1 d\omega_2$$

où la singularité δ^2 disparaît avec $\langle\ \rangle$ et il reste $\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)$

$$6)\ \langle J_2(E_{0\kappa_1}E_{0\kappa_2})E_{1-\kappa}\rangle = \left\langle \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\,E_{0\kappa_1}E_{0\kappa_2}\,\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\pi^{-1}_{-\kappa}\,\sigma_{-\kappa\kappa'_1\kappa'_2}\,E^0_{\kappa'_1}E^0_{\kappa'_2}\,\delta(\kappa+\kappa'_1+\kappa'_2)\right\rangle$$

Ici encore un certain nombre de combinaisons des vecteurs d'ondes sont interdites ; $\langle E^0_{\kappa_1}E^0_{\kappa_2}\rangle = \langle E^2_{0\kappa_1}\rangle\,\delta(\kappa_1+\kappa_2)$ entraîne $K = 0$. Il ne reste possible d'utiliser que $\langle E_{0\kappa_1}E_{0\kappa'_1}\rangle$ et $\langle E_{0\kappa_2}E_{0\kappa'_2}\rangle$; dans ces conditions on trouve :

$$\langle J_2(E_{0\kappa_1}E_{0\kappa_2})E_1\rangle = \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\,\delta^2(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\pi^{-1}_{-\kappa}\,\sigma_{-\kappa-\kappa_1-\kappa_2}\,\langle E^2_{0\kappa_1}\rangle\langle E^2_{0\kappa_2}\rangle\,\vec{d\kappa_1}\vec{d\kappa_2}\,d\omega_1 d\omega_2$$

On doit encore simplifier une des fonctions δ au moyen de la moyenne $\langle\ \rangle$.

Au terme $\langle J_2(E_0E_1)E_0\rangle$ on doit encore joindre le terme symétrique $\langle J_2(E_1E_0)E_0\rangle$ qui s'écrit :

$$\langle J_2(E_1E_0)E_0\rangle = \int \sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\,\pi^{-1}_{\kappa_1}\,\sigma_{\kappa_1-\kappa_2\kappa}\,\delta^2(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\langle E^2_{0\kappa_2}\rangle\langle E^2_{0\kappa}\rangle\,\vec{d\kappa_2}\vec{d\kappa_1}\,d\omega_2 d\omega_1$$

On voit que par rapport au terme (5) $\vec{K}_2$ remplace $\vec{K}_1$. On doit d'autre part procéder à la même sélection des $\vec{K}$ et à la même simplification pour δ^2

Les termes (5), (6) et (7) que nous venons d'écrire représentent non seulement des termes d'interaction d'ondes mais encore des interactions d'ondes et de particules. Cela provient de ce que les fonctions $\sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ contiennent des intégrales du type $\int \frac{dv_{\parallel}\,f_0(v_{\parallel})}{\omega_\alpha - \kappa^\alpha_{\parallel}v_{\parallel} - n\Omega}$ où $\alpha = 1, 2, 0$. Ces intégrales, du fait que ω contient une petite partie imaginaire, se décomposent en partie principale plus $i\pi\,\delta(\omega_\alpha - \kappa^\alpha_{\parallel}v_{\parallel} - n\Omega)$ qui, combinée avec la fonction $\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)$ nous donne une expression du type $\delta(\omega-\omega_1-(\kappa-\kappa_1)_{\parallel}v_{\parallel}-n\Omega)$
Cette dernière forme correspond bien à l'interaction d'une onde et d'une particule.

Il s'ensuit que pour obtenir les coefficients relatifs aux interactions d'ondes, nous prendrons les termes $\sigma\ \Pi^{-1}\ \sigma$ en partie principale.

Nous pouvons maintenant écrire l'équation du bilan (sans expliciter d'ailleurs l'interaction ondes-particules). On a :

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\partial\omega\varepsilon'_{ij}}{\partial\omega}+\frac{c^2\kappa^2}{\omega^2}\left(\frac{\kappa_i\kappa_j}{\kappa^2}-\delta_{ij}\right)\right\}\tau^i_\kappa\bar{\tau}^j_{-\kappa}\ \frac{\partial\langle E^2\rangle_{\kappa\omega}}{\partial t}+\sigma_{ij}\tau^i_\kappa\tau^j_{-\kappa}\langle E^2\rangle_{\kappa\omega}=$$

$$\int\left(\sigma^{i'j'}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\right)^i\left(\Pi^{-1\ j''}_{\kappa_2\ j'}\cdot\sigma^{i''\ j}_{\kappa_2\ -\kappa_1\ \kappa\ j''}\right)\tau_{\kappa_1 i'}\bar{\tau}_{-\kappa_1 i''}\tau_{\kappa j}\tau_{-\kappa i}\,\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\langle E^2_{o\kappa_1}\rangle\langle E^2_{o\kappa}\rangle\,d\vec{\kappa}_2\,d\vec{\kappa}_1\,d\omega_2\,d\omega_1$$

$$+\int\left(\sigma^{i'j'}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\right)^i\left(\Pi^{-1\ j}_{-\kappa\ i}\cdot\sigma^{i''j''}_{-\kappa-\kappa_1-\kappa_2\ j}\right)\tau_{\kappa_1 i'}\bar{\tau}_{-\kappa_1 i''}\tau_{\kappa_2 j'}\bar{\tau}_{-\kappa_2 j''}\,\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\langle E^2_{o\kappa_1}\rangle\langle E^2_{o\kappa_2}\rangle\,d\vec{\kappa}_2\,d\vec{\kappa}_1\,d\omega_2\,d\omega_1$$

$$+\int\left(\sigma^{i'j'}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\right)^i\left(\Pi^{-1\ j''}_{\kappa_1\ j'}\cdot\sigma^{i''j}_{\kappa_1\ -\kappa_2\ \kappa\ j''}\right)\bar{\tau}_{\kappa_2 i''}\bar{\tau}_{-\kappa_2 j}\tau_{\kappa i'}\bar{\tau}_{-\kappa i}\,\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\langle E^2_{o\kappa_2}\rangle\langle E^2_{o\kappa}\rangle\,d\vec{\kappa}_2\,d\vec{\kappa}_1\,d\omega_2\,d\omega_1$$

(54)

+ tous les termes obtenus au moyen de diverses combinaisons possibles du type $K \pm K_1 \pm K_2$

On a posé $E_i = \tau_i\ E$ où τ_i est la projection du vecteur unité dont <u>l'amplitude dans le temps n'évolue pas</u>

Pour étudier l'évolution dans le temps de $\langle E^2_K\rangle$ il serait nécessaire, évidemment, d'écrire tous les termes relatifs aux différentes combinaisons possibles de K, K_1, K_2. Mais pour obtenir les probabilités d'interaction des ondes, cela n'est pas nécessaire.

Considérons en effet le quatrième terme de l'équation d'évolution. Il s'écrit :

$$\text{IIII}\quad\int\sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\ \Pi^{-1}_{\kappa}\ \sigma_{-\kappa-\kappa_1-\kappa_2}\ \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\langle E^2_{\kappa_1}\rangle\langle E^2_{\kappa_2}\rangle\,d\vec{\kappa}_1\,d\vec{\kappa}_2\,d\omega_1\,d\omega_2$$

posons d'autre part :

$$\left\{\frac{\partial\omega\varepsilon'_{ij}}{\partial\omega}+\frac{c^2\kappa^2}{\omega^2}\left(\frac{\kappa_i\kappa_j}{\kappa^2}-\delta_{ij}\right)\right\}\bar{\tau}_i(\kappa)\,\bar{\tau}_j{}^{+}(\kappa)=S_\kappa$$

Il s'ensuit que $S_\kappa\ \langle E^2_\kappa\rangle=\omega_\kappa N(\kappa)$ et donc $N(\kappa)=S_\kappa\cdot\omega^{-1}_\kappa\ \langle E^2_\kappa\rangle$

D'après les dimensions tensorielles S_κ est scalaire et selon que l'on veut étudier l'évolution du nombre d'ondes ou l'évolution de $\langle E^2_\kappa\rangle$ il faudra faire ou non apparaître $S_\kappa\,\omega^{-1}_\kappa\ \langle E^2_\kappa\rangle$

On a alors :

$$\underline{\text{IV}}=\int\frac{\sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\ \Pi^{-1}_{\kappa}\ \sigma_{-\kappa-\kappa_1-\kappa_2}}{S_{\kappa_1}\ \omega^{-1}_{\kappa_1}\ S_{\kappa_2}\ \omega^{-1}_{\kappa_2}}\ \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,.\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\ S_{\kappa_2}\,\omega^{-1}_{\kappa_2}\langle E^2_{\kappa_2}\rangle\ S_{\kappa_1}\,\omega^{-1}_{\kappa_1}\langle E^2_{\kappa_1}\rangle\,d\vec{\kappa}_2\,d\vec{\kappa}_1\,d\omega_2\,d\omega_1$$

D'autre part, il est nécessaire de tenir compte du fait que $\vec{K}$ et ω vérifient l'équation de dispersion. On trouve :

$$\langle E_i(\kappa,\omega)\, E_j^{+}(\kappa,\omega)\rangle = \sum_{\alpha} \tau_i^{\alpha}(\kappa,\omega)\, \tau_j^{\alpha}(-\kappa,-\omega)\, \frac{\delta(\omega-\omega_\alpha(\kappa))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_\alpha}} \langle E^2_{\kappa\omega}\rangle$$

où α est l'indice relatif aux différents modes de l'équation de dispersion.

Une décomposition semblable a lieu pour $\sigma_{\kappa\,\kappa_1\kappa_2}\,\Pi^{-1}\,\sigma_{\kappa_2-\kappa_1,\kappa}$ par rapport à K . Si on affecte à K l'indice α , à K_1 l'indice β , à K_2 l'indice γ , l'équation d'évolution fondamentale s'écrit :

$$\sum_{\alpha} S_{\kappa\alpha}\, \frac{\partial \langle E^2_{\kappa\omega}\rangle}{\partial t}\, \frac{\delta(\omega-\omega_\alpha(\kappa))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_\alpha(\kappa)}} + \sum_{\alpha} \sigma_\kappa \langle E^2_{\kappa\omega}\rangle\, \frac{\delta(\omega-\omega_\alpha(\kappa))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_\alpha(\kappa)}} =$$

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\gamma} \int \left(\sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\,\Pi^{-1}_{\kappa_2}\,\sigma_{\kappa_2-\kappa_1,\kappa}\right) \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\, \frac{\delta(\omega-\omega_\alpha(\kappa))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_\alpha}}\, \frac{\delta(\omega-\omega_\beta(\kappa_1))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_\beta(\kappa_1)}}\, \frac{\delta(\omega-\omega_\gamma(\kappa_2))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_\gamma(\kappa_2)}} \langle E^2_{\kappa_1}\rangle \langle E^2_{\kappa}\rangle\, d\vec{\kappa}_2\, d\vec{\kappa}_1$$

$$+ \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\gamma} \int \left(\sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\,\Pi^{-1}_{-\kappa}\,\sigma_{-\kappa-\kappa_1-\kappa_2}\right) \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\, \frac{\delta(\omega-\omega_\alpha(\kappa))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_\alpha}}\, \frac{\delta(\omega-\omega_\beta(\kappa_1))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_\beta}}\, \frac{\delta(\omega-\omega_\gamma(\kappa_2))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_\gamma}} \langle E^2_{\kappa_1}\rangle \langle E^2_{\kappa_2}\rangle\, d\vec{\kappa}_2\, d\vec{\kappa}_1$$

$$+ \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\gamma} \ldots \text{ etc.} \qquad (55)$$

Il s'ensuit que si l'on identifie les termes pour les mêmes α , on a une simplification en $\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_\alpha(\kappa)}$ et l'on peut alors écrire la probabilité d'interaction des ondes $\alpha\beta\gamma$ sous la forme :

$$V^{\alpha\beta\gamma}_{\kappa\kappa_1\kappa_2} = \delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\,\delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\, \mathcal{P}\left\{ \left(\sigma^{i'j'}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\right)^{i} \left(\Lambda^{\,j}_{-\kappa\, i}\, \sigma^{i''j''}_{-\kappa-\kappa_1-\kappa_2}\right)\right\}. \qquad (56)$$

$$\frac{\delta(\omega-\omega_\alpha(\kappa))}{\omega}\, \frac{\delta(\omega_1-\omega_\beta(\kappa_1))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1}\right|_{\omega_1=\omega_\beta(\kappa_1)}} \langle \tau_{i''}\, \tau^{+}_{i'}\rangle_{\kappa_1} \cdot$$

$$\cdot \frac{\delta(\omega_2-\omega_{2\gamma}(\kappa))}{\left.\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2}\right|_{\omega_2=\omega_\gamma(\kappa_2)}} \langle \tau_{j'}\, \tau^{+}_{j''}\rangle_{\kappa_\gamma} \cdot \frac{\omega_1}{s_{\kappa_1}} \cdot \frac{\omega_2}{s_{\kappa_2}}$$

Dans ces formules on a $\Pi^{-1} = \frac{\Lambda}{\Delta}$ où $\Delta = \left| \kappa^2\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij} \right| = A\eta^4 + B\eta^2 + C$

avec pour un plasma placé dans un champ magnétique constant :

$$A = \varepsilon_{11} \sin^2\theta + \varepsilon_{33} \cos^2\theta + 2\,\varepsilon_{13} \sin\theta \cos\theta$$

$$B = 2\left(\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}\right)\sin\theta\cos\theta - \left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}^2\right)\sin^2\theta - \left(\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}^2\right)\cos^2\theta$$
$$- \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{13}^2$$

$$C = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2 + 2\,\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}$$

où $\theta = (\vec{\kappa}, \vec{B}_0$ et (ox) dans le plan de $(\vec{\kappa}, \vec{B}_0)$

$$\eta^2 = \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \qquad \text{(sans dimensions)}$$

Le symbole $\mathcal{P}$ désigne la partie principale au sens de Cauchy. $\hat{\sigma} \wedge \sigma$ comprenant une somme étendue de $-\infty$ à $+\infty$ et contenant des termes du type $\dfrac{1}{\omega - \kappa_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega}$. La partie principale sera la somme des parties principales de tous les termes.

Le calcul de chacune des parties principales se fait au moyen de la fonction plasma. Les intégrales sont toutes de la forme :

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v_{\parallel})\, v_{\parallel}^{K}}{\omega - \kappa_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega}\, dv_{\parallel} \qquad \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v_{\parallel})\, v_{\parallel}^{K}\, dv_{\parallel}}{(\omega - \kappa_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega)(\omega_c - \kappa_{\parallel}^{(s)} v_{\parallel} - p\Omega)} \qquad \text{or} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{\parallel}^{K} f(v_{\parallel})\, dv_{\parallel}}{(\omega - \kappa_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega)(\omega_c - \kappa_{\parallel}^{(s)} v_{\parallel} - p\Omega)^2}$$

Nous donnons dans l'appendice (1) l'expression de ces intégrales (avec K = 0, 1, 2) dans lesquelles nous devons poser : $a = \dfrac{\omega - n\Omega}{\kappa_{\parallel}}$ $\qquad b = \dfrac{\omega_c - p\Omega}{\kappa_{\parallel}}$

Et le tenseur ε_{ij} est donné par les formules :

$$\varepsilon_{11} = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\gamma_0}{\beta} e^{-\beta} \sum_n \frac{n^2}{\gamma_n} I_n(\beta)\left[\varphi(\gamma_n) - i\sqrt{\pi}\,\gamma_n e^{-\gamma_n^2}\right]$$

$$\varepsilon_{12} = -i\frac{\Omega^2}{\omega^2}\gamma_0 e^{-\beta} \sum_n \frac{n}{\gamma_n}\left[I_n'(\beta) - I_n(\beta)\right]\left[\varphi(\gamma_n) - i\sqrt{\pi}\,\gamma_n e^{-\gamma_n^2}\right]$$

$$\varepsilon_{13} = -\sqrt{2}\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\gamma_0}{\sqrt{\beta}} e^{-\beta} \sum_n n\, I_n(\beta)\left[\varphi(\gamma_n) - 1 - i\sqrt{\pi}\,\gamma_n e^{-\gamma_n^2}\right]\frac{\kappa_z}{|\kappa_z|}$$

$$\varepsilon_{22} = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\gamma_0 e^{-\beta} \sum_n \frac{1}{\gamma_n}\left[\left(2\beta + \frac{n^2}{\beta}\right) I_n(\beta) - 2\beta I_n'(\beta)\right]\left[\varphi(\gamma_n) - i\sqrt{\pi}\,\gamma_n e^{-\gamma_n^2}\right]$$

$$\varepsilon_{23} = i\frac{\Omega^3}{\omega^2}\gamma_0\sqrt{2\beta}\, e^{-\beta} \sum_n \left[I_n'(\beta) - I_n(\beta)\right]\left[\varphi(\gamma_n) - 1 - i\sqrt{\pi}\,\gamma_n e^{-\gamma_n^2}\right]\frac{\kappa_z}{|\kappa_z|}$$

$$\varepsilon_{33} = 1 - 2\frac{\Omega^2}{\omega^2}\gamma_0 e^{-\beta} \sum_n \gamma_n I_n(\beta)\left[\varphi(\gamma_n) - 1 - i\sqrt{\pi}\,\gamma_n e^{-\gamma_n^2}\right] \qquad (57)$$

$$\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12} \qquad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \qquad \varepsilon_{32} = -\varepsilon_{23}$$

$$\beta = \frac{\kappa_z^2 \bar{v}}{3\omega_B^2} \qquad \bar{v} = \left(\frac{2T}{m}\right)^{1/2} \qquad \gamma_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{\omega - n\omega_B}{|\kappa_z|\bar{v}}$$

$$\varphi(\gamma) = 2\gamma e^{-\gamma^2}\int_0^{\gamma} e^{x^2} dx$$

Les composantes de ε_{ij} sont ici écrites dans un système d'axe où l'axe des z est parallèle à Bo et l'axe des x est dans le plan (K , Bo)

Les coordonnées des vecteurs de polarisation τ_i peuvent être obtenues à partir de l'équation de dispersion

$$\tau_1 = f(\theta,\kappa,\omega)\,\tau_2 \qquad \tau_3 = g(\theta,\kappa,\omega)\,\tau_2$$

avec $\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2=1$ et

$$\begin{aligned}\Pi_{11} f + \Pi_{12} + \Pi_{13} g &= 0\\ \Pi_{21} f + \Pi_{22} + \Pi_{23} g &= 0\\ \Pi_{31} f + \Pi_{32} + \Pi_{33} g &= 0\end{aligned}$$

Donc

$$\tau_1 = \frac{f(\theta,\omega,\kappa)}{(f^2+g^2+1)^{1/2}} \qquad \tau_2 = \frac{1}{(f^2+g^2+1)^{1/2}} \qquad \tau_3 = \frac{g(\theta,\kappa,\omega)}{(f^2+g^2+1)^{1/2}} \tag{58}$$

où

$$f(\theta,\kappa,\omega) = \frac{\Pi_{12}\Pi_{23}-\Pi_{22}\Pi_{13}}{\Pi_{11}\Pi_{23}-\Pi_{21}\Pi_{13}} \quad \text{ou bien} \quad f = \frac{\Pi_{22}\Pi_{33}-\Pi_{23}\Pi_{32}}{\Pi_{21}\Pi_{33}-\Pi_{23}\Pi_{31}}$$

$$g(\theta,\kappa,\omega) = \frac{\Pi_{32}\Pi_{11}-\Pi_{12}\Pi_{31}}{\Pi_{13}\Pi_{31}-\Pi_{33}\Pi_{11}} \quad \text{ou bien} \quad g = \frac{\Pi_{21}\Pi_{32}-\Pi_{22}\Pi_{31}}{\Pi_{21}\Pi_{33}-\Pi_{23}\Pi_{31}}$$

Le tenseur Π_{ij} est donné par l'expression

$$\Pi_{ij} = \left\{ \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}\left(\frac{\kappa_i\kappa_j}{\kappa^2}-\delta_{ij}\right)+\varepsilon_{ij}\right\}$$

ou si $\eta^2 = \dfrac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}$

$$\Pi_{ij} = \begin{pmatrix} -\eta^2\cos^2\theta+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & -\eta^2+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & -\eta^2\sin^2\theta+\varepsilon_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} \end{pmatrix} \tag{59}$$

Par conséquent on a pour f et g

$$f(\theta,\kappa,\omega) = \frac{(\varepsilon_{22}-\eta^2)(\varepsilon_{13}+\eta^2\sin\theta\cos\theta)-\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}}{\{(\eta^2\sin^2\theta-1)+\varepsilon_{11}\}\varepsilon_{23}-\varepsilon_{21}(\eta^2\cos\theta\sin\theta+\varepsilon_{13})} = \frac{(\varepsilon_{22}-\eta^2)(\varepsilon_{33}-\eta^2\sin^2\theta)+\varepsilon_{23}^2\varepsilon}{\varepsilon_{12}(\eta^2\sin^2\theta-\varepsilon_{33})-\varepsilon_{23}(\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})}$$

$$g(\theta,\kappa,\omega) = \frac{\varepsilon_{32}\{\eta^2(\sin^2\theta-1)+\varepsilon_{11}\}-\varepsilon_{12}(\eta^2\cos\theta\sin\theta+\varepsilon_{31})}{(\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})(\eta^2\cos\theta\sin\theta+\varepsilon_{31})-\{\eta^2\cos^2\theta-\eta^2+\varepsilon_{33}\}\{\varepsilon_{11}-\eta^2\cos^2\theta\}}$$

$$= \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}-(\varepsilon_{22}-\eta^2)(\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})}{\varepsilon_{12}(\eta^2\sin^2\theta-\varepsilon_{33})-\varepsilon_{23}(\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})}$$

et enfin on trouve pour $\dfrac{\Delta}{\Delta} = \Pi^{-1}$ ou $\Pi^{-1}_{ij} = \dfrac{\Delta_{ij}}{\Delta}$

avec

$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} (\eta^2-\varepsilon_{22})(\eta^2\sin^2\theta-\varepsilon_{33})+\varepsilon_{23}^2 & (\eta^2\sin^2\theta-\varepsilon_{33})\varepsilon_{12}-(\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})\varepsilon_{23} & (\eta^2-\varepsilon_{22})(\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} \\ (\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})\varepsilon_{23}-(\eta^2\sin^2\theta-\varepsilon_{33})\varepsilon_{12} & (\eta^2\cos^2\theta-\varepsilon_{11})(\eta^2\sin^2\theta-\varepsilon_{33})-(\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})^2 & (\eta^2\cos^2\theta-\varepsilon_{11})\varepsilon_{23}-(\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})\varepsilon_{12} \\ (\eta^2-\varepsilon_{22})(\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} & (\eta^2\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{13})\varepsilon_{12}-(\eta^2\cos^2\theta-\varepsilon_{11})\varepsilon_{23} & (\eta^2\cos^2\theta-\varepsilon_{11})(\eta^2-\varepsilon_{22})+\varepsilon_{12}^2 \end{pmatrix} \qquad (60)$$

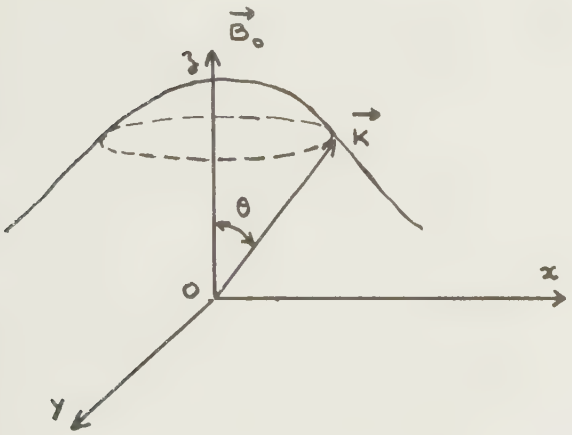
§4 - ETUDE DU PROBLEME DE LA SELECTION DES ONDES (dans le cas $\vec{B}_0$ constant quelconque)

Dans tout ce qui a précédé, nous avons parlé de probabilité d'interaction d'ondes sans nous préoccuper de savoir si ces ondes étaient compatibles avec la relation de dispersion, c'est-à-dire sans savoir si étant donné deux ondes $(\vec{K}_1, \omega_1)$ $(\vec{K}_2, \omega_2)$ on peut réaliser $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ et $K_1 + K_2 = K_3$ avec $\omega_3 = \omega_3(\vec{K}_3)$ vérifiant la relation de dispersion.

Pour pouvoir discuter ce problème on peut, par exemple, se fixer $\vec{K}_1$ et ω_1 appartenant à un mode donné et ensuite voir comment choisir K_2 pour qu'appartenant soit au même mode, soit à un autre on ait K_3 et ω_3 solution de l'équation de dispersion. En présence d'un champ magnétique B_0 nous avons déjà écrit l'équation de dispersion qui a la forme :

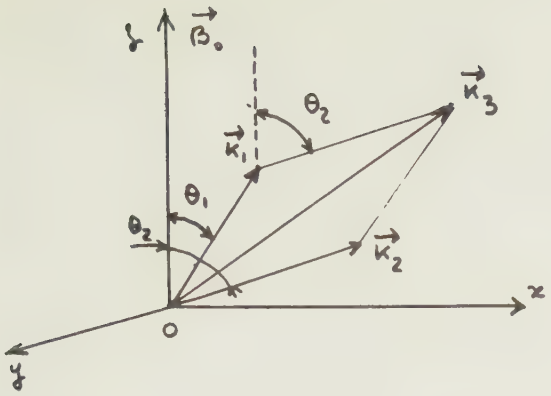
$$A(\varepsilon_{ij}, \theta)\,\eta^4 + B(\varepsilon_{ij}, \theta)\,\eta^2 + C(\varepsilon_{ij}) = 0 \qquad \text{où } \eta = \frac{Kc}{\omega}$$

et θ angle de $\vec{K}$ et $\vec{B}_0$.



Comme les ε_{ij} ne dépendent que de $\Omega_p, \omega, \omega_B, K_{\parallel}, K_{\perp}, \vec{v}$ on voit que lorsque θ est constant et $K_{\parallel}$ fixé, l'extrémité de $\vec{K}$ parcourt un cercle horizontal centré sur oz à la distance $K_{\parallel}$ de xoy. Ceci est normal puisque B_0 créé nécessairement une symétrie cylindrique.

Prenons alors deux vecteurs $\vec{K}_1$ et $\vec{K}_2$ d'angle θ_1 et θ_2 avec B_0 donné.

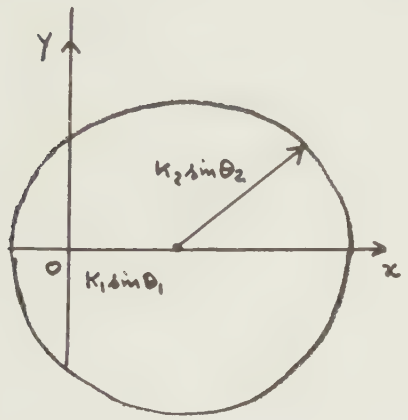


Supposons $\vec{K}_1$ fixe dans le plan xoz . Le vecteur $\vec{K}_2$ tracé à partir de l'extrémité de $\vec{K}_1$ décrit un cône et son extrémité un cercle. Ce cercle est aussi le lieu de l'extrémité de $\vec{K}_3$.

Si nous projettons tous les vecteurs sur xoy on a :

$$K_{1x} = K_1 \sin\theta_1$$

$$K_{2\perp} = K_2 \sin\theta_2$$



Le cercle, lieu de l'extrémité de K_2 a pour rayon $K_2 \sin\theta_2$ D'autre part, il faut que $\vec{K}_3$, obtenu géométriquement à partir de $\vec{K}_1$ et $\vec{K}_2$, c'est-à-dire $\vec{K}_3 = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$ soit le même que celui obtenu en écrivant la relation de dispersion pour $\omega_1 + \omega_2$

Posons égal à $(K_3)_d$ le K_3 obtenu par la relation de dispersion. Si, alors, on suppose que

$$(\vec{K_3})_{d\,\parallel} = (\vec{K_3})_{\parallel}$$

on doit savoir que le cercle de rayon $K_3(\omega_1+\omega_2)\sin\theta_3$ coupe le cercle de rayon $K_2 \sin\theta_2$ avec la conditian :

$$\left(\vec{K_3}(\omega_1+\omega_2)\right)_{\parallel} = (\vec{K_1})_{\parallel} + (\vec{K_2})_{\parallel}$$

Ceci nous amène à une condition sur l'angle θ_3 . Comme $\left(\overrightarrow{K_3(\omega_1+\omega_2)}\right)_{\parallel}$ est donné, seul $\left(\overrightarrow{K_3(\omega_1+\omega_2)}\right)_{\perp}$ reste à déterminer par la relation de dispersion.
La condition de sélection s'écrira alors :

$$K_{3\perp}(\omega_1+\omega_2) \leq K_1 \sin\theta_1 + K_2 \sin\theta_2 \qquad \text{d'une part}$$

et $\quad |K_2 \sin\theta_2 - K_1 \sin\theta_1| \leq K_{3\perp}(\omega_1+\omega_2) \quad$ d'autre part .

Ce qui encore peut s'écrire :

$$|K_2 \sin\theta_2 - K_1 \sin\theta_1| \leq K_3(\omega_1+\omega_2)\sin\theta_3 \leq K_1 \sin\theta_1 + K_2 \sin\theta_2 \qquad 0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

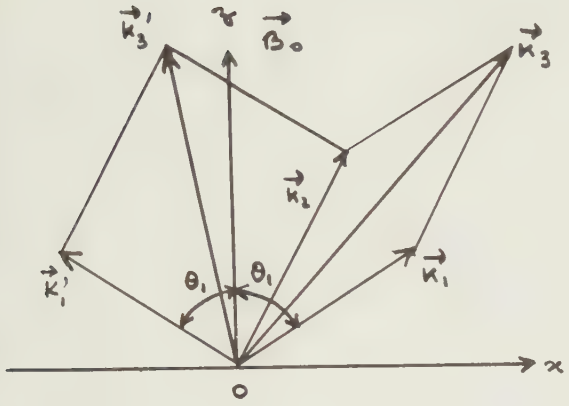
ou encore on peut écrire :

$$K_2^2 \sin^2\theta_2 + K_1^2 \sin^2\theta_1 - 2K_2K_1 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \leq K^2(\omega_1+\omega_2) - (K_1\cos\theta_1 + K_2\cos\theta_2)^2 \leq K_1^2\sin^2\theta_1 + K_2^2\sin^2\theta_2 + 2K_1K_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$

c'est-à-dire :

$$K_2^2 + K_1^2 + 2K_1K_2\cos(\theta_2+\theta_1) \leq K^2(\omega_1+\omega_2) \leq K_1^2+K_2^2+2K_1K_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

Ceci représente donc la condition de possibilité de sélection des ondes. On peut encore y parvenir par une voie complètement différente. En effet :



Si nous interprétons géométriquement cette condition, elle signifie encore que le K^2 obtenu par la relation de dispersion doit être compris entre les valeurs extrêmes du carré de la somme géométrique des vecteurs $\vec{K}_1$ et $\vec{K}_2$, avec θ_1 et θ_2 constants, $\vec{K}_1$ et $\vec{K}_2$ tournant autour de (oz)
Ces valeurs extrêmes sont alors nécessairement obtenues (si on fixe K_1 dans le plan xoz) en prenant les deux positions symétriques de $\vec{K}_2$ autour de oz. On a alors $(\vec{K}_1, \vec{K}_2) = |\theta_1-\theta_2|$ pour l'une des positions extrêmes et $(\vec{K}_1, \vec{K}_2) = \theta_1+\theta_2$ pour l'autre position.

§.5 - PROBLEME DE LA SELECTION POUR B_0 GRAND

Procédons à l'étude du problème de la sélection des ondes dans le cas particulier d'un champ magnétique fort.

L'équation de dispersion s'écrit, dans ce cas particulier : $A_0\eta^4 + B_0\eta^2 + C_0 = 0$

avec : $A_0 = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta \qquad B_0 = \frac{\Omega^2}{\omega^2}(\cos^2\theta+1) - 2 \qquad C = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}$

d'où l'équation :

$$\left[1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta\right]\eta^4 + \left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}(\cos^2\theta+1) - 2\right]\eta^2 + 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = 0$$

qui s'écrit encore : $(\eta^2-1)\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}(\eta^2\cos^2\theta - 1) - (\eta^2-1)\right] = 0$

d'où les deux solutions :

$$\eta_+^2 = 1 \qquad \text{pour l'onde ordinaire} \qquad (61)$$

$$\eta_-^2 = \frac{\omega^2-\Omega^2}{\omega^2-\Omega^2\cos^2\theta} \qquad \text{pour l'onde extraordinaire} \qquad (62)$$

L'onde ordinaire étant obtenue à partir de la solution particulière $\theta = 0$ pour η_-^2, occupons-nous de η_-^2 (η_+^2 est en fait défini quelque soit θ)

L'équation pour η_-^2 s'écrit encore :

$$K^2 c^2 = \frac{\omega^2(\omega^2 - \Omega^2)}{\omega^2 - \Omega^2 \cos^2\theta}$$

on doit vérifier simultanément $\vec{K_1} + \vec{K_2} = \vec{K}$ et $\omega_1 + \omega_2 = \omega$

on a :

$$K_\perp^2 + K_{//}^2 = \frac{(\omega_1+\omega_2)^2 - \Omega^2}{c^2\left(1 - \frac{\Omega^2 \cos^2\theta}{(\omega_1+\omega_2)^2}\right)}$$

d'où, comme

$$K_{//}^2 = (K_{//}^{(1)} + K_{//}^{(2)})^2 = K_1^2 \cos^2\theta_1 + K_2^2 \cos^2\theta_2 + 2K_1K_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

on trouve :

$$K_\perp^2 = \frac{(\omega_1+\omega_2)^2 - \Omega^2}{c^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{(\omega_1+\omega_2)^2}\cos^2\theta\right)} - K_1^2\cos^2\theta_1 - K_2^2\cos^2\theta_2 - 2K_1K_2\cos\theta_1\cos\theta_2$$

D'où, en exprimant la condition :

$$(K_1 \sin\theta_1 - K_2 \sin\theta_2)^2 \leq K_\perp^2 \leq (K_1 \sin\theta_1 + K_2 \sin\theta_2)^2$$

on trouve :

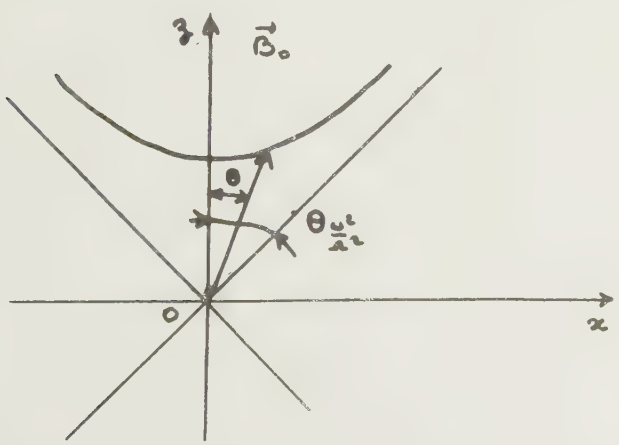
$$K_1^2 + K_2^2 + 2K_1K_2\cos(\theta_1+\theta_2) \leq \frac{(\omega_1+\omega_2)^2 - \Omega^2}{c^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{(\omega_1+\omega_2)^2}\cos^2\theta\right)} \leq K_1^2 + K_2^2 + 2K_1K_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

où : $K_1^2 = \frac{\omega_1^2 - \Omega^2}{c^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\cos^2\theta_1\right)}$ $\qquad K_2^2 = \frac{\omega_2^2 - \Omega^2}{c^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\cos^2\theta_2\right)}$

posons $K_1^2 + K_2^2 + 2K_1K_2\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = K_{\theta_1 \pm \theta_2}^2$ la condition à vérifier s'écrit alors

$$K_{\theta_1+\theta_2}^2 \leq \frac{(\omega_1+\omega_2)^2 - \Omega^2}{c^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{(\omega_1+\omega_2)^2}\cos^2\theta\right)} \leq K_{\theta_1-\theta_2}^2$$

L'expression $1 - \frac{\Omega^2}{(\omega_1+\omega_2)^2}\cos^2\theta$ n'est pas toujours positive pour toute valeur des paramètres ω_1, ω_2, θ, par conséquent pour obtenir la condition sur $\cos^2\theta$ on doit tout d'abord étudier la relation de dispersion. Celle-ci s'étudie facilement et on a trois cas possibles :



A - $\omega < \Omega$ où Ω est donné.

Il faut alors $\omega^2 < \Omega^2 \cos^2\theta$

où $\cos^2\theta > \frac{\omega^2}{\Omega^2}$

c'est-à-dire si on appelle $\theta_{\frac{\omega^2}{\Omega^2}}$ l'angle maximum ainsi défini, on doit avoir :

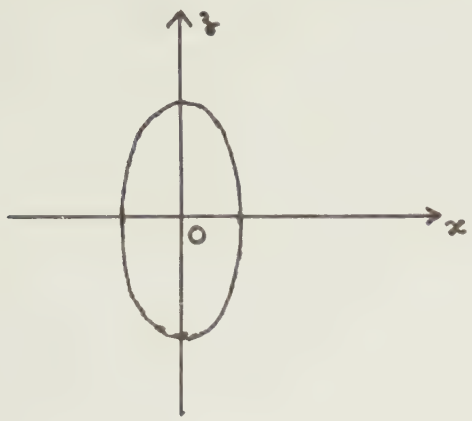
$$-\theta_{\frac{\omega^2}{\Omega^2}} < \theta < \theta_{\frac{\omega^2}{\Omega^2}}$$

On a alors la courbe ci-contre. On voit que si $\theta = 0$

$K^2c^2 = \omega^2$ et si $\theta \to \theta_{\frac{\omega^2}{\Omega^2}}$

$\omega^2 - \Omega^2\cos^2\theta \to 0$ et donc $K \to \infty$

B - $\omega \to \Omega$ alors $K \to 0$ sauf si, simultanément $\theta \to 0$, alors K peut être $\neq 0$ mais la propagation est nécessairement parallèle à oz (c'est-à-dire B_0)



C - $\omega > \Omega$ alors on doit avoir $\omega^2 - \Omega^2 \cos^2\theta > 0$

ce qui est vérifié quel que soit θ

En ce cas, le lieu est une ellipse de grand axe

$K = \pm \frac{\omega}{c}$ et de petit axe $K = \pm \left(\frac{\omega^2 - \Omega^2}{c^2}\right)^{1/2}$

Si donc on fait interargir deux ondes de fréquence ω_1 et ω_2 on peut avoir pour chacune d'elles trois cas possibles : $\omega_1 < \Omega$ $\omega_1 = \Omega$ $\omega_1 > \Omega$

$\omega_2 < \Omega$ $\omega_2 = \Omega$ $\omega_2 > \Omega$

et la combinaison $\omega_1 \pm \omega_2$ peut se résumer dans un tableau qui montre les différents passages possibles d'une branche de l'équation de dispersion à une autre, au cours d'une interaction non linéaire

	$\omega_1 < \Omega$	$\omega_1 = \Omega$	$\omega_1 > \Omega$
$\omega_2 < \Omega$	$\omega_1+\omega_2 < \Omega$ $\omega_1+\omega_2 = \Omega$ $\omega_1+\omega_2 > \Omega$	$\omega_1+\omega_2 > \Omega$	$\omega_1+\omega_2 > \Omega$
$\omega_2 = \Omega$	$\omega_1+\omega_2 > \Omega$	$\omega_1+\omega_2 > 2\Omega$	$\omega_1+\omega_2 > 2\Omega$
$\omega_2 > \Omega$	$\omega_1+\omega_2 > \Omega$	$\omega_1+\omega_2 > 2\Omega$	$\omega_1+\omega_2 > 2\Omega$

	$\omega_1 < \Omega$	$\omega_1 = \Omega$	$\omega_1 > \Omega$
$\omega_2 < \Omega$	$\lvert\omega_2-\omega_1\rvert < \Omega$	$\lvert\omega_1-\omega_2\rvert < \Omega$	$\omega_1-\omega_2 < \Omega$ $\omega_1-\omega_2 = \Omega$ $\omega_1-\omega_2 > \Omega$
$\omega_2 = \Omega$	$\omega_2-\omega_1 < \Omega$	$\omega_1-\omega_2 \sim 0$	$\omega_1-\omega_2 < \Omega$ $\omega_1-\omega_2 = \Omega$ $\omega_1-\omega_2 > \Omega$
$\omega_2 > \Omega$	$\omega_2-\omega_1 < \Omega$ $\omega_2-\omega_1 \sim \Omega$ $\omega_2-\omega_1 > \Omega$	$\omega_2-\omega_1 < \Omega$ $\omega_2-\omega_1 = \Omega$ $\omega_2-\omega_1 > \Omega$	$\lvert\omega_1-\omega_2\rvert < \Omega$ $\lvert\omega_1-\omega_2\rvert = \Omega$ $\lvert\omega_1-\omega_2\rvert > \Omega$

(63)

Ainsi même pour une relation de dispersion très simple, le nombre de combinaisons possibles d'interaction est assez élevé.

On voit donc que trois cas différents seront à examiner. Ou la fréquence résultante est inférieure à Ω ou égale, ou supérieure. Posons $\omega < \Omega$ 1er cas ; $\omega < \Omega$

en ce cas $1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta < 0$ ou $\frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta - 1 > 0$

D'autre part la conditions générale que nous avons exprimée précédemment s'écrit ici :

$$K^2_{\theta_1+\theta_2} \leq \frac{\Omega^2-\omega^2}{c^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta - 1\right)} \leq K^2_{\theta_1-\theta_2}$$

En résolvant l'inégalité à droite on trouve d'abord :

$$\frac{\Omega^2-\omega^2}{K^2_{\theta_1-\theta_2}} \leq c^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta - 1\right) \qquad \text{ou encore} \quad \frac{\Omega^2-\omega^2}{c^2K^2_{\theta_1-\theta_2}} + 1 \leq \frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta$$

En résolvant l'inégalité à gauche on trouve de même :

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta - 1 \leq \frac{\Omega^2-\omega^2}{c^2K^2_{\theta_1+\theta_2}} \qquad \text{ou} \quad \frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta \leq \frac{\Omega^2-\omega^2}{c^2K^2_{\theta_1+\theta_2}} + 1$$

et il nous faut réunir les deux conditions trouvées.

Par conséquent la possibilité de sélection s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{\Omega^2}\left\{\frac{\Omega^2-\omega^2}{c^2K^2_{\theta_1-\theta_2}} + 1\right\} \leq \cos^2\theta \leq \frac{\omega^2}{\Omega^2}\left\{\frac{\Omega^2-\omega^2}{c^2K^2_{\theta_1+\theta_2}} + 1\right\}$$

pour se rendre compte que cette inégalité admet toujours au moins une solution en θ on peut constater que lorsque θ_1 tend vers $\theta_{\frac{\omega_1^2}{\Omega^2}}$, θ et θ_2 tend vers $\theta_{\frac{\omega_2^2}{\Omega^2}}$ $K^2_{\theta_1-\theta_2} \to \infty$

Donc la première inégalité a toujours au moins une solution.

Comme, d'autre part $\frac{1}{K^2_{\theta_1-\theta_2}} < \frac{1}{K^2_{\theta_1+\theta_2}}$ du fait que $\cos(\theta_1-\theta_2) > \cos(\theta_1+\theta_2)$

pour des angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, la deuxième inégalité aura toujours au moins une solution et on pourra trouver une solution commune aux deux inégalités.

Deuxième cas : $\omega \sim \Omega$ $\Omega^2-\omega^2 \sim 0$ donc il faut que $K^2_{\theta_1+\theta_2} \sim 0$

Pour cela il faut que $\theta_2 = \pi - \theta_1$ mais alors $\theta = 0$ (ce qui est aussi évident à partir de la relation de dispersion).

On doit avoir alors la condition : $\frac{(\omega_1 \mp \omega_2)^2}{c^2} \leq K_1^2 + K_2^2 - 2K_1K_2\cos(2\theta_1)$

si $\theta_1 \to \theta_{\frac{\omega_1^2}{\Omega^2}}$ $K_1^2 \to \infty$ et pour ω_1 et ω_2 donnés en supposant $\omega_1 < \Omega$

il y aura une valeur de θ_1 à partir de laquelle l'inégalité sera réalisée, c'est-à-dire qu'il existe toujours au moins une solution.

Troisième cas : $\omega > \Omega$ les inégalités du premièr cas doivent être renversées.

on a : $$K^2_{\theta_1+\theta_2} \leq \frac{\omega^2-\Omega^2}{c^2\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta\right)} \leq K^2_{\theta_1-\theta_2}$$

$$\frac{\omega^2-\Omega^2}{c^2 K^2_{\theta_1-\theta_2}} \leq 1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta \qquad \text{donc} \quad 1-\frac{\omega^2-\Omega^2}{c^2 K^2_{\theta_1-\theta_2}} \geq \frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos^2\theta$$

Par conséquent on a :

$$\frac{\omega^2}{\Omega^2}\left\{1-\frac{\omega^2-\Omega^2}{c^2 K^2_{\theta_1+\theta_2}}\right\} \leq \cos^2\theta \leq \frac{\omega^2}{\Omega^2}\left\{1-\frac{\omega^2-\Omega^2}{c^2 K^2_{\theta_1-\theta_2}}\right\}$$

Comme $\frac{1}{K^2_{\theta_1+\theta_2}} > \frac{1}{K^2_{\theta_1-\theta_2}}$ pour des angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ il suffit de montrer que

$\frac{\omega^2}{\Omega^2}\left\{1-\frac{\omega^2-\Omega^2}{c^2 K^2_{\theta_1+\theta_2}}\right\}$ peut être rendu inférieur à 1 pour certains ω

or, pour ω très grand, cette expression devient négative, donc il existe un ω pour lequel elle est nulle et donc inférieure à 1. Donc il existe au moins un domaine de θ et ω pour lequel ce type d'interaction est possible.

§6- ETUDE DE LA PROBABILITE DE DISLOCATION D'ONDES POUR $\vec{B_o}$ GRAND -

Nous devons calculer

$$V(K,K_1,K_2) = \delta(\omega_1+\omega_2-\omega)\,\delta(K-K_1-K_2)\,\Theta\left\{\left(\vec{\sigma}^{i'j'}_{K K_1 K_2}\right)^i \left(\Lambda^j_{i-K}\,\sigma^{i''j''}_{-K-K_1-K_2\,j}\right)\right\}_{\alpha\beta\gamma} \cdot$$

$$\frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{S_{K_1} \cdot S_{K_2}} \cdot \frac{<\bar{\tau}_{i'}, \bar{\tau}_{i''}>_{K_1^\alpha}}{\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_1}\Big|_{\omega_1^\alpha=\omega_1}} \cdot \frac{<\bar{\tau}_{j'}, \bar{\tau}_{j''}>_{K_2^\beta}}{\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_2}\Big|_{\omega_2=\omega_2^\beta}} \qquad (64)$$

où $\Lambda = \Delta \cdot \Pi$

Dans le cas particulier de $\vec{B_o}$ grand, le tenseur Π_{ij} s'écrit :

$$\Pi_{ij} = \begin{pmatrix} -\eta^2\cos^2\theta+1 & 0 & \eta^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & -\eta^2+1 & 0 \\ \eta^2\sin\theta\cos\theta & 0 & -\eta^2\sin^2\theta+1-\frac{\Omega^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \qquad (65)$$

avec $\eta = \frac{Kc}{\omega}$ $\left(\theta = (\vec{K}, \vec{B_o})\right)$ et l'axe oz dirigé suivant B_o, l'axe ox dans le plan (K, B_o)

A. Calcul des vecteurs de polarisation -

Les $\bar{\tau}_i$, $\bar{\tau}_j$ sont solution du système relatif aux vecteurs de polarisation $\bar{\Pi}_{ij}\,\bar{\tau}_j = 0$ et qui s'écrit, dans ce cas particulier :

$$\begin{aligned} (-\eta^2\cos^2\theta + 1)\,\bar{\tau}_1 + \eta^2 \sin\theta\cos\theta\,\bar{\tau}_3 &= 0 \\ (1-\eta^2)\,\bar{\tau}_2 &= 0 \\ \eta^2\sin\theta\cos\theta\,\bar{\tau}_1 + \left(1 - \eta^2\sin^2\theta - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\bar{\tau}_3 &= 0 \end{aligned}$$

D'où $\tau_3^2 = \frac{1}{1+f^2}$ $\tau_1^2 = \frac{f^2}{1+f^2}$ avec $f = \frac{\eta^2\sin\theta\cos\theta}{\eta^2\cos^2\theta - 1}$

Si $\eta^2 = \eta_+^2 = 1$ $\tau_{1+}^2 = \cos^2\theta$ $\tau_{3+}^2 = \sin^2\theta$ et comme $\tau_1^2 + \tau_3^2 = 1$

$\tau_{2+} = 0$

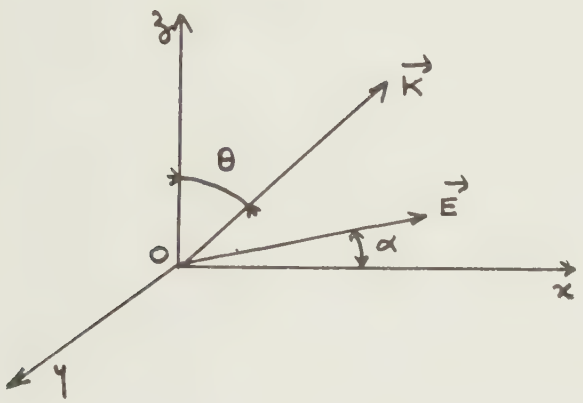
Remarquons que $\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$ sont égaux à leurs mineurs respectifs normalisés par la condition $\bar{\tau}_1^{\,2} + \bar{\tau}_3^{\,2} = 1$

$$\bar{\tau}_1 \sim \left(1 - \eta^2\sin^2\theta - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \qquad \bar{\tau}_3 \sim \eta^2\sin\theta\cos\theta$$

ou encore $\tau_1 \sim \eta^2\sin\theta\cos\theta$ $\tau_3 \sim 1 - \eta^2\cos^2\theta$

$\bar{\tau}_2 = 0$ et η_-^2 vérifie la relation de dispersion :

$$\eta^2 = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2\cos^2\theta}$$



on a évidemment : $tg\,\alpha = \frac{\bar{\tau}_3}{\bar{\tau}_1} = \frac{-\eta^2\cos^2\theta + 1}{\eta^2\sin\theta\cos\theta}$

avec : $\alpha = (\vec{E}, \vec{B}_0)$

d'où $tg\,\alpha = \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\,tg\,\theta$

d'où si $\theta = 0$ $\alpha = 0$ sauf si $\Omega \equiv \omega$

Dans ce dernier cas $\alpha = \frac{\Pi}{2}$ on a donc pour $K \,/\!/\, B_0$ deux types d'ondes. Si $\theta = \frac{\Pi}{2}$, $\alpha = \frac{\Pi}{2}$ et on a une onde transversale.

Enfin, pour qu'il y ait une autre onde longitudinale oblique pour un certain θ , il faut que :

$$tg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\theta} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad tg^2\theta = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}$$

Ceci n'est possible que si $\omega < \Omega$ et comme $\cos^2\theta = \frac{1}{1+tg^2\theta} = \frac{\omega^2}{\Omega^2}$ $\eta^2 = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2 - \omega^2} \to \infty$ (voir remarque)

Dans le cas particulier que nous traitons, l'expression de Δ est

$$\Delta = (\eta^2 - 1)\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(\eta^2\cos^2\theta - 1\right) - (\eta^2 - 1)\right)$$

B.-Expression du champ en fonction du courant du deuxième ordre-

On doit, d'autre part, inverser le tenseur $\bar{\Pi}_{ij} = K^2\delta_{ij} - K_i K_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}$ au moyen de la relation :

$$\bar{\Pi}_{ij}\,E_j = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\,J_i^{(2)} \equiv \frac{4\pi i\omega}{c^2}\int d\kappa_{12}\,\delta(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2)\,\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)\,\Gamma^{i'i''}_{\kappa\kappa_1\kappa_2 i}\,E_{i'}(\kappa_1)\,E_{i''}(\kappa_2)$$

d'où l'on trouve :

$$\begin{aligned} E_1 &= (\eta^2 - 1)\,\frac{\eta^2\sin\theta\cos\theta}{\Delta}\,J_3^{(2)}\cdot\frac{4\pi i\omega}{c^2} \\ E_2 &= 0 \\ E_3 &= \frac{(\eta^2\cos^2\theta - 1)(\eta^2 - 1)}{\Delta}\,J_3^{(2)}\cdot\frac{4\pi i\omega}{c^2} \end{aligned} \qquad (66)$$

Ces formules s'expliquent par le fait qu'en présence d'un champ magnétique fort, seule la composante du courant suivant oz est non nulle.

Remarque : lorsque $\eta^2 \to \infty$ d'après l'appendice III les ondes correspondantes sont fortement amorties.

On a en conséquence :

$$\sigma \,.\, \Lambda \,.\, \sigma \;=\; \frac{4\pi i\omega}{c^2}\,\frac{(\eta^2\cos^2\theta-1)(\eta^2-1)}{\Delta}\left(\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\right)^2$$

C. Etude de l'existence possible des différentes formes d'interaction suivant la nature de l'équation $\omega = \omega(k)$.

$$\langle E_i E_j\rangle_{\kappa\omega} \equiv \langle E_i E_j\rangle_{\kappa\omega}\,\delta(\Delta) = \langle E_i E_j\rangle_{\kappa\omega}\frac{\delta(\omega-\omega^+)}{\frac{\partial\Delta_0}{\partial\omega^+}(\eta_+^2-1)+\Delta_0^+\frac{\partial\eta_+^2}{\partial\omega^+}} + \langle E_i E_j\rangle_{\kappa\omega}\frac{\delta(\omega-\omega^-)}{\frac{\partial\Delta_0}{\partial\omega^-}(\eta_-^2-1)+\Delta_0^-\frac{\partial\eta_-^2}{\partial\omega^-}}$$

$$= \frac{\langle E^2_{\kappa\omega}\rangle\,\tau_i\bar\tau_j\,\delta(\omega-\omega^+)}{\Delta_0^+\;\frac{\partial\eta_+^2}{\partial\omega^+}} + \frac{\langle E^2_{\kappa\omega}\rangle\,\tau_i\tau_j\;\delta(\omega-\omega^-)}{(\eta_-^2-1)\;\frac{\partial\Delta_0}{\partial\omega^-}}$$

et comme $\frac{1}{\Delta} = \mathcal{P}\frac{1}{\Delta} + i\pi\,\delta(\Delta) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\Delta}\right) + i\pi\,\frac{\delta(\omega-\omega^-)}{\frac{\partial\Delta}{\partial\omega^-}} + i\pi\,\frac{\delta(\omega-\omega^+)}{\frac{\partial\Delta}{\partial\omega^+}}$

En négligeant $\mathcal{P}\frac{1}{\Delta}$, qui correspond à la partie non résonnante, on voit que l'on rencontre dans l'expression $V(\kappa,\kappa_1,\kappa_2)$ trois fois une expression du type $\delta(\Delta)$ et les combinaisons entre les différentes branches $\delta(\omega-\omega^-)$ et $\delta(\omega-\omega^+)$ nous donnent les différents types d'interactions possibles. Ces dernières sont au nombre de huit et s'écrivent :

$$V(\kappa^-,\kappa_1^-,\kappa_2^-) \quad V(\kappa^-,\kappa_1^+,\kappa_2^-) \quad V(\kappa^-,\kappa_1^-,\kappa_2^+) \quad V(\kappa^-,\kappa_1^+,\kappa_2^+)$$

$$V(\kappa^+,\kappa_1^-,\kappa_2^-) \quad V(\kappa^+,\kappa_1^+,\kappa_2^-) \quad V(\kappa^+,\kappa_1^-,\kappa_2^+) \quad V(\kappa^+,\kappa_1^+,\kappa_2^+)$$

Comme dans le cas particulier que nous traitons on a $\Lambda_\kappa(1)=0$, c'est-à-dire $\Lambda_{\kappa^+}=0$ il s'ensuit que :

$$\frac{\Lambda_\kappa}{\Delta_\kappa} = \frac{\Lambda_{\kappa^+}\,\delta(\omega-\omega^+)}{\frac{\partial\Delta}{\partial\omega}\Big|_{\omega=\omega^+}} + \frac{\Lambda_{\kappa^-}\,\delta(\omega-\omega^-)}{\frac{\partial\Delta}{\partial\omega}\Big|_{\omega=\omega^-}} = \frac{\Lambda_{\kappa^-}\,\delta(\omega-\omega^-)}{\frac{\partial\Delta}{\partial\omega}\Big|_{\omega=\omega^-}}$$

En ce cas, toutes les probabilités du type $V(\kappa^+,\kappa_1^\mp,\kappa_2^\mp)$ sont nulles et il ne nous reste à cacluler que quatre types d'interactions possibles, à savoir :

$$V(\kappa^-,\kappa_1^-,\kappa_2^-) \quad V(\kappa^-,\kappa_1^+,\kappa_2^-) \quad V(\kappa^-,\kappa_1^-,\kappa_2^+) \quad V(\kappa^-,\kappa_1^+,\kappa_2^+)$$

on a :

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_-} = (\eta_-^2-1)\left[\frac{2\Omega^2}{\omega^3} - \frac{4\Omega^2}{\omega^3}\eta_-^2\cos^2\theta + \frac{2\eta_-^2}{\omega}\right] \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial\omega^+} = \frac{2\Omega^2\sin^2\theta}{\omega^3} \tag{67}$$

avec $$\eta_-^2-1 = \frac{\Omega^2\sin^2\theta}{\Omega^2\cos^2\theta-\omega^2} \qquad \eta_-^2\cos^2\theta-1 = \frac{\omega^2\sin^2\theta}{\Omega^2\cos^2\theta-\omega^2} \tag{68}$$

D'autre part, nous devons aussi calculer $\left\{\frac{\partial\omega\,\varepsilon'_{ij}}{\partial\omega} + \frac{c^2\kappa^2}{\omega^2}\left(\frac{\kappa_i\kappa_j}{\kappa^2}-\delta_{ij}\right)\right\}\tau_i\tau_j \equiv S$

pour la branche η_- et pour la branche η_+

Cette expression est utile lorsque l'on veut exprimer la variation de l'amplitude de l'énergie due seulement à la dislocation des ondes.

Pour des raisons de dimension tensorielle, il suffit de calculer cette expression dans le système d'axes particuliers, dans lequel nous avons obtenu toutes nos expressions jusqu'à présent ; on a alors :

$$\varepsilon_{11} = 1 \qquad \varepsilon_{33} = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \qquad \tau_2 = 0$$

$$\frac{\partial \omega \varepsilon'_{ij}}{\partial \omega} \tau^i \tau^j = \tau_1^2 + \tau_3^2 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \tau_3^2 = 1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \tau_3^2$$

$$\frac{c^2 \kappa^2}{\omega^2} \left(\frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2} - \delta_{ij} \right) \tau^i \tau^j = \eta^2 \left\{ \frac{\kappa_1^2}{\kappa^2} \tau_1^2 + \frac{\kappa_3^2}{\kappa^2} \tau_3^2 - 1 \right\} \quad \text{et} \quad \frac{\kappa_1^2}{\kappa^2} = \sin^2\theta \quad \frac{\kappa_3^2}{\kappa^2} = \cos^2\theta$$

Enfin $$\bar{\tau}_3 = \frac{1 - \eta^2 \cos^2\theta}{\left[1 + \eta^2 \cos^2\theta (\eta^2 - 2)\right]^{1/2}} \qquad \bar{\tau}_1 = \frac{\eta^2 \sin\theta \cos\theta}{\left[1 + \eta^2 \cos^2\theta (\eta^2 - 2)\right]^{1/2}}$$

par conséquent : $$\tau_3^+ = \sin\theta \qquad \tau_1^+ = \cos\theta$$

$$(\tau_3^-)^2 = \frac{tg^2\theta}{tg^2\theta + (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \qquad (\tau_1^-)^2 = \frac{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + tg^2\theta}$$

d'où : $$S^- = \left\{ 1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{tg^2\theta}{tg^2\theta + (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2} + \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2 \cos^2\theta} \left[\frac{\sin^2\theta (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + tg^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{tg^2\theta + (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2} \right] \right\}$$

$$= \left\{ 1 + \frac{\sin^2\theta}{tg^2\theta + (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2} \left[\frac{\Omega^2}{\omega^2 \cos^2\theta} + \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2 \cos^2\theta} \left(\left[1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right]^2 + 1 \right) \right] \right\} \qquad (69)$$

et : $$S^+ = \sin^2\theta \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} + 2\cos^2\theta \right) + 1 \qquad (70)$$

Avant d'écrire l'expression des probabilités d'interaction nous devons encore écrire l'expression de la seule composante non nulle de $\sigma^{ij}_{\kappa \kappa_1 \kappa_2}$ qui est $\sigma^{33}_{\kappa \kappa_1 \kappa_2}$. Pour constater qu'il en est bien ainsi, il suffit de voir les formules donnant les expressions de $\frac{\partial^2 J_2}{\partial E^i_{\kappa_1} \partial E^j_{\kappa_2}}$ écrits aux pages 32 - 36 et faire dans ces formules $\Omega \to \infty$

Dans l'expression de $\frac{\partial^2 J_2}{\partial E_{\parallel}(\kappa_1) \partial E_{\parallel}(\kappa_2)}$ (page 32) si on fait $\Omega \to \infty$ tous les termes avec n et m $\neq 0$ s'annulent et par conséquent on a $\vec{\sigma}^{33}_{\kappa \kappa_1 \kappa_2} = \frac{\partial^2 \vec{J}_2(\kappa, \omega)}{\partial E_{\parallel}(\kappa_1) \partial E_{\parallel}(\kappa_2)}$

et $$\vec{\sigma}^{33}_{\kappa \kappa_1 \kappa_2} = \frac{e^3}{T} \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^\infty dv_\perp \int dv_H \frac{\vec{h}\, v_\perp v_{\parallel} f_0(v_H) f_0(v_\perp)}{(\omega - \kappa_{\parallel} v_H)(\omega_2 - \kappa^{(2)}_{\parallel} v_{\parallel})} \left\{ \frac{-m v_{\parallel}^2}{T} + \frac{v_H \kappa_H}{\omega_2 - \kappa^{(2)}_{\parallel} v_{\parallel}} + 1 \right\}$$

Comme on choisi $f_0(v_\perp) = \beta e^{-\alpha v_\perp^2}$ avec $\alpha = \frac{m}{T}$ $\beta = \frac{n}{(2\pi\alpha)^{3/2}}$, l'intégration sur $v_\perp$ est immédiate et on a alors pour $\sigma^{33}_{\kappa \kappa_1 \kappa_2}$ l'expression :

$$\vec{\sigma}^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2} = \frac{e^3}{T}\,\frac{\beta}{2\alpha}\int dv_{//}\,\frac{e^{-\alpha v_{//}^2}\,v_{//}}{(\omega-\kappa_{//}v_{//})(\omega_2-\kappa_{//}^{(2)}v_{//})}\left\{-\frac{m v_{//}^2}{T}+\frac{v_{//}\kappa_{//}}{\omega_2-\kappa_{//}^{(2)}v_{//}}+1\right\}$$

On doit constater que dans l'expression approchée de $\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ que nous obtenons, $\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ ne dépend que de K et K_2. Cependant nous continuerons à indiquer les trois indices K, K_1, K_2 car on peut dans le cas où Ω est grand prendre des approximations différentes de celles que nous avons prises et pour lesquelles $\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ dépendrait des trois indices.

D. On a donc pour expression des probabilités

$$V(K^-,K_1^-,K_2^-)=\delta(\omega^--\omega_1^--\omega_2^-)\,\delta(K^--K_1^--K_2^-)\qquad(\sigma^{33}_{K^-K_1^-K_2^-})^2\,\frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\cos^2\theta-\omega^2)^2}\,\frac{tg^2\theta_1\cdot tg^2\theta_2}{\left[tg^2\theta_1+(1-\frac{\Omega^2}{\omega_1^2})^2\right]\left[tg^2\theta_2+(1-\frac{\Omega^2}{\omega_2^2})^2\right]}\cdot(71)$$

$$\frac{\omega_1}{S^-_{K_1}}\cdot\frac{\omega_2}{S^-_{K_2}}\cdot\frac{\left|(\Omega^2\cos^2\theta_1-\omega_1^2)\right|\left|(\Omega^2\cos^2\theta_2-\omega_2^2)\right|}{\Omega^2\sin^2\theta_1\,\Omega^2\sin^2\theta_2\left[\frac{2\Omega^2}{\omega_1^3}-\frac{4\Omega^2}{\omega_1^3}(\eta_1^-)^2\cos^2\theta_1+2\frac{(\eta_1^-)^2}{\omega_1}\right]\left[\frac{2\Omega^2}{\omega_2^3}-\frac{4\Omega^2}{\omega_2^3}(\eta_2^-)^2\cos^2\theta_2+2\frac{(\eta_2^-)^2}{\omega_2}\right]}$$

$$V(K^-,K_1^+,K_2^-)=\delta(\omega^--\omega_1^+-\omega_2^-)\,\delta(K^--K_1^+-K_2^-)\qquad(\sigma^{33}_{K^-K_1^+K_2^-})^2\,\frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\cos^2\theta-\omega^2)^2}\cdot\frac{\omega_1^3\,tg^2\theta_2}{\left[tg^2\theta_2+(1-\frac{\Omega^2}{\omega_2^2})^2\right]2\Omega^2}\cdot(72)$$

$$\frac{\omega_1}{S^+_{K_1}}\cdot\frac{\omega_2}{S^-_{K_2}}\cdot\frac{\left|(\Omega^2\cos^2\theta_2-\omega_2^2)\right|}{\Omega^2\sin^2\theta_2\left[\frac{2\Omega^2}{\omega_2^3}-\frac{4\Omega^2}{\omega_2^3}(\eta_2^-)^2\cos^2\theta_2+2\frac{(\eta_2^-)^2}{\omega_2}\right]}$$

$$V(K^-,K_1^-,K_2^+)=\delta(\omega^--\omega_1^--\omega_2^+)\,\delta(K^--K_1^--K_2^+)\qquad(\sigma^{33}_{K^-K_1^-K_2^+})^2\,\frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\cos^2\theta-\omega^2)^2}\cdot\frac{\omega_2^3\,tg^2\theta_1}{\left[tg^2\theta_1+(1-\frac{\Omega^2}{\omega_1^2})^2\right]2\Omega^2}\qquad(73)$$

$$\frac{\omega_1}{S^-_{K_1}}\cdot\frac{\omega_2}{S^+_{K_2}}\cdot\frac{\left|(\Omega^2\cos^2\theta_1-\omega_1^2)\right|}{\Omega^2\sin^2\theta_1\left[\frac{2\Omega^2}{\omega_1^3}-\frac{4\Omega^2}{\omega_1^3}(\eta_1^-)^2\cos^2\theta_1+2\frac{(\eta_1^-)^2}{\omega_2}\right]}$$

$$V(K^-,K_1^+,K_2^+)=\delta(\omega^--\omega_1^+-\omega_2^+)\,\delta(K^--K_1^+-K_2^+)\qquad(\sigma^{33}_{K^-K_1^+K_2^+})^2\,\frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\cos^2\theta-\omega^2)^2}\cdot\frac{\omega_1^3}{2\Omega^2}\,\frac{\omega_2^3}{2\Omega^2}\,\frac{\omega_1}{S^+_{K_1}}\cdot\frac{\omega_2}{S^+_{K_2}}\qquad(74)$$

Avec:
$$S^-_K=\left\{1+\frac{\sin^2\theta}{tg^2\theta+(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2})^2}\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2\cos^2\theta}+\frac{\omega^2-\Omega^2}{\omega^2-\Omega^2\cos^2\theta}\left((1-\frac{\Omega^2}{\omega^2})^2+1\right)\right]\right\}\qquad(75)$$

$$S^+_K=\sin^2\theta\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}+2\cos^2\theta\right)+1\qquad(76)$$

On a par ailleurs les valeurs limites: $S^-_K(\theta=0)=1$ $\qquad S^-_K(\theta=\frac{\pi}{2})=1+\frac{\Omega^2}{\omega^2}$

$S^+_K(\theta=0)=1$ $\qquad S^+_K(\theta=\frac{\pi}{2})=\frac{\Omega^2}{\omega^2}+1$

Remarquons que dans ces expressions on suppose ω, ω_1, ω_2 donnés et K, K_1, K_2 tirés de la relation de dispersion indiquée aux pages précédentes. A une valeur ω, ω_1, ω_2 peuvent correspondre deux valeurs de K, K, K et nous n'avons indiqué que les expressions correspondant aux valeurs positives, les autres s'obtenant en changeant K en -K, K_1 en $-K_1$, K_2 en $-K_2$ et en combinant de toutes les façons possibles. Le calcul de $\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ est indiqué en appendice et on a :

$$\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2} = \frac{e^3}{mT}\frac{\beta}{\kappa_2\kappa}\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\omega_2^2 m}{\kappa_2^2 T}-1\right)+\frac{m}{T}\frac{1}{2\alpha^{3/2}}+\left(1-\frac{m\omega_2^2}{\kappa_2^2 T}\right)2\frac{\omega_2}{\kappa_2}e^{-\alpha\frac{\omega_2^2}{\kappa_2^2}}\left(\int_0^{\frac{\omega_2\sqrt{\alpha}}{\kappa_2}} e^{t^2}dt\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\omega^2 m}{\kappa^2 T}-1\right)+\frac{m}{T 2\alpha^{3/2}}+\left(1-\frac{m\omega^2}{\kappa^2 T}\right)2e^{-\alpha\frac{\omega^2}{\kappa^2}}\left(\int_0^{\frac{\omega}{\kappa}\sqrt{\alpha}} e^{t^2}dt\right)\right]\frac{1}{\frac{\omega}{\kappa}-\frac{\omega_2}{\kappa_2}} +$$

$$+\frac{\kappa}{\kappa_2}\frac{\omega}{\kappa\left(\frac{\omega}{\kappa}-\frac{\omega_2}{\kappa_2}\right)^2}\left[\frac{-1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{2\omega}{\kappa}e^{-\alpha\frac{\omega^2}{\kappa^2}}\left(\int_0^{\frac{\omega}{\kappa}\sqrt{\alpha}} e^{t^2}dt\right)\right] +$$

$$\left.+\frac{\kappa}{\kappa_2}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\kappa}-\frac{\omega_2}{\kappa_2}\right)^2}\left[\frac{\omega}{\kappa\sqrt{\alpha}}+2e^{-\alpha\frac{\omega_2^2}{\kappa_2^2}}\left(\int_0^{\frac{\omega_2}{\kappa_2}\sqrt{\alpha}} e^{t^2}dt\right)\left(\frac{\omega_2^2}{\kappa_2^2}-2\frac{\omega_2}{\kappa_2}\frac{\omega}{\kappa}-2\frac{\omega_2^3}{\kappa_2^3}\frac{\omega}{\kappa}\alpha+2\frac{\omega_2^4}{\kappa_2^4}\alpha\right)+2\left(\frac{\omega_2^2}{\kappa_2^2}\frac{\omega}{\kappa}-\frac{\omega_2^3}{\kappa_2^3}\right)\right]\right\}$$

où on a posé $\kappa=\kappa_{11}$ $\kappa_2=(\kappa_2)_{11}$ $\alpha=\frac{m}{2T}$ $\beta=\frac{n}{(2\pi\alpha)^{3/2}}$ (77)

L'expression de $\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ est complqiuée . Compte tenu de la relation de dispersion étudiée aux pages 37 à 39 on peut pour commencer considérer ω et ω_2 donnés , θ variable et par conséquent κ_{11} et $\kappa^{(2)}_{11}$ variables.

Nous avons plusieurs cas possibles : ou ω et ω_2 sont inférieurs à la fréquence plasma et en ce cas on peut avoir selon les valeurs de θ , K_{11} et $K_{2\,11}\to\infty$ et K_{11}, $K_{2\,11}$ seront toujours supérieurs à K_{11} $(\theta=0)$ et $K_{2\,11}(\theta=0)$.

Ou bien $\omega\to\Omega_p$ et $K\to 0$ avec soit $\omega_2<\Omega_p$, et donc on pourra avoir $K_{2\,11}\to\infty$ soit $\omega_2>\Omega_p$ et donc $|K_{2\,11}|<\infty$

Enfin si $\omega>\Omega_p$ et $\omega_2>\Omega_p$ on pourra avoir selon θ, K_{11} et $K_{2\,11}\to 0$ ou $K_{11}\neq 0$ et $\kappa_{2\,11}\to 0$, etc ..

Etudions ces différents cas .

1er cas : Supposons $\omega\neq\omega_2\neq 0<\Omega_p$ et $K\sim K_2\to\infty$ alors $\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ s'écrit

$$\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\sim\frac{e^3}{mT}\frac{\beta\sqrt{\pi}}{\kappa_2}\left[\left(\frac{m}{2T\alpha^{3/2}}-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{\omega-\omega_2}\right)\right]\sim\frac{C_0}{\kappa_{11}}$$

cette expression décroît comme $\frac{1}{K_{11}}$ et par conséquent dans ce cas l'interaction sera d'autant plus favorable que K est grand .

Si maintenant on fixe K_2 et que l'on fait tendre $K\to\infty$. Alors $\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ aura la forme :

$\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\sim\frac{C_1}{\kappa_2}+C_2$ et par conséquent l'interaction pourra être dans certains cas d'autant plus forte que K_{11} est grand mais en général celle-ci sera décroissante avec $K\to\infty$.

Si enfin on fixe K_{11} et que l'on fait tendre $K_2\to\infty$, alors $\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}$ aura la forme :

$\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2}\sim\frac{C_1}{\kappa_2}$ et dans ce cas l'intéraction sera à nouveau d'auant plus favorable que K est grand .

2ème cas : Nous allons maintenant supposer que $K\to$ et $K_2\to\infty$ d'une part et ensuite $K\to\infty$ et $K_2\to 0$ ceci est d'après la relation de dispersion possible soit si $\omega\to\Omega$ soit si $\omega>\Omega$

Si $K_{1\parallel} \to 0$ et $K_{2\parallel} \to \infty$ comme nous rencontrons les produits $K.K_2$ on doit supposer que $K \to 0$ comme $\frac{1}{K^n}$ ou $n = 1, 2, ..$ etc . En ce cas $\sigma^{33}_{K K_1 K_2}$ s'écrit pour $n=1$:

$\sigma^{33}_{K K_1 K_2} \sim \frac{C_1}{K_{2\parallel}}$ et donc l'intéraction sera d'autant plus faible que $K_{2\parallel}$ est grand .

Si $n=2$ $\sigma^{33}_{K K_1 K_2} \sim \frac{C_1}{K_{2\parallel}}$ et donc l'interaction s'affaiblira si $K_2 \to \infty$

Si $K_{2\parallel} \to 0$ et $K_{1\parallel} \to \infty$ et n = 1 alors $\sigma^{33}_{K K_1 K_2}$ s'écrit : ($K_{2\parallel} \sim \frac{1}{K_{1\parallel}}$) $\sigma^{33}_{K K_1 K_2} \sim \frac{C_1}{K_{1\parallel}}$

et cette interaction est à nouveau décroissante si $K \to \infty$.

3ème cas : Il reste le cas où on peut avoir $K_{2\parallel}$ et $K_{1\parallel}$ tendant simultanément vers zéro .

En ce cas $\sigma^{33}_{K K_1 K_2}$ prend la forme si on suppose $K_2 \sim K$.

$\sigma^{33}_{K K_1 K_2} \sim \frac{C_1}{K_{1\parallel}} + \frac{C_2}{K_{1\parallel}^3}$ et cette intéraction sera d'autant plus forte que $K_{1\parallel}$ est faible.

On voit donc que dans beaucoup de cas on pourra conclure que la force de l'interaction en fonction de K se comportera comme $\frac{1}{K_{1\parallel}}$.

Remarquons que d'une façon générale l'expression de $\sigma^{33}_{K K_1 K_2}$ est disymétrique en K_1 et K_2 . Cela provient de ce que K_1 a été dés le début affecté aux particularités des champs électriques et K_2 aux particularités de la fonction de distribution.

F. Discussion des résultats précédents .

Les formules que nous avons obtenues permettent d'étudier tous les cas possibles d'interaction d'ondes selon les valeurs des paramètres $\omega_1, \omega_2, \omega, \theta, \theta_1, \theta_2$. Il est à remarquer que $\sigma^{33}_{K K_1 K_2}$ est indépendant de $\theta_1, \theta_2, \theta$

Etant donné le nombre considérable de cas possibles limitons nous à un certain nombre de cas définis pour certaines valeurs particulières de $\theta, \theta_1, \theta_2$.

- Disposons tout d'abord $\theta_1 = \theta_2 = \theta = 0$ alors $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \cos\theta = 1$ $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \sin\theta = 0$ et les expressions des probabilités sont en ce cas toutes nulles et il n'est même pas besoin d'étudier la possibilité de sélection. On doit remarquer à ce propos que si nous faisions tout de même létude de la sélection on trouverait que le problème est toujours possible, ce qui montre l'importance du calcul des probabilités d'interaction. Cela est vrai, même lorsque $\omega_1 = \omega_2 = \Omega$ car alors nécessairement $\omega > \Omega$

- Supposons maintenant que $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ alors $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \cos\theta = 0$ $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \sin\theta = 1$
En ce cas, la relation de dispersion pour η_- s'écrit $\omega_i^2 \eta_i^2 = \omega_i^2 - \Omega^2$ avec $i = 1, 2, 0$
Pour η_+ elle reste la même et on a pour expression des probabilités :

$$V(K^-, K_1^-, K_2^-) = \delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\,\delta(K-K_1-K_2)\left(\sigma^{33}_{K^-(\frac{\pi}{2}), K_1^-(\frac{\pi}{2}), K_2^-(\frac{\pi}{2})}\right)^2 \frac{\omega_1^3\omega_2^3}{4\omega^2\Omega^2}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right)^{-1}\omega_1.\omega_2 \quad (78)$$

$$V(K^-, K_1^+, K_2^-) = \delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\,\delta(K-K_1-K_2)\left(\sigma^{33}_{K^-(\frac{\pi}{2}), K_1^+, K_2^-(\frac{\pi}{2})}\right)^2 \frac{\omega_1^3\omega_2^3}{4\omega^2\Omega^2}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right)^{-1}\omega_1.\omega_2 \quad (79)$$

$$V(K^-, K_1^-, K_2^+) = \delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\,\delta(K-K_1-K_2)\left(\sigma^{33}_{K^-(\frac{\pi}{2}), K_1^-(\frac{\pi}{2}), K_2^+}\right)^2 \frac{\omega_1^3\omega_2^3}{4\omega^2\Omega^2}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right)^{-1}\omega_1.\omega_2 \quad (80)$$

$$V(K^-, K_1^+, K_2^+) = \delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\,\delta(K-K_1-K_2)\left(\sigma^{33}_{K^-(\frac{\pi}{2}), K_1^+, K_2^+}\right)^2 \frac{\omega_1^3\omega_2^3}{4\omega^2\Omega^2}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right)^{-1}\omega_1.\omega_2 \quad (81)$$

On voit que dans ce cas précis les probabilités ne diffèrent que par le σ^{33} ; elles sont définies quels que soient $\omega_1, \omega_2, \omega$. Pour $\omega_1, \omega_2, \omega$ donnés et tels que $\omega_1+\omega_2=\omega$, $\kappa\ \kappa_1\ \kappa_2$ dans le cas d'une propagation transversale au champ magnétique ne peuvent jamais être ni infinis ni nuls. L'expression explicite de $(\sigma^{33})^2$ obtenue à la page précédente ne permet de dire qu'une seule chose c'est qu'il s'agit d'une interaction moyenne et qui donc doit normalement être perçue par l'expression

Dans ce cas précis il y a évidemment un sens à étudier la possibilité de sélection. La condition de cette possibilité s'écrira :

$$1-\frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1-\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} + 1-\frac{\Omega^2}{\omega_2^2} + 2\left[\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right)\right]^{1/2}\cos\varphi$$

où $\omega^2=(\omega_1+\omega_2)^2$ $\qquad \varphi=(\vec{\kappa_1},\vec{\kappa_2})$ c-a-d $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

La condition que nous venons d'écrire impose que ω_1 et ω_2 soient simultanément ou plus petits ou plus grands que Ω (ce qui en général n'a pas lieu). φ est une inconnue à déterminer. Après réduction au même dénominateur cette équation devient du huitième degré en ω_1 et ω_2 et sauf nécessité imposée par l'expérience on peut particulariser le problème en introduisant une condition supplémentaire entre ω_1 et ω_2 .

Supposons donc par exemple $\omega_1=\omega_2$ alors $\omega_1+\omega_2=2\omega_1$ et on a :

$$\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} = \frac{1+2\cos\varphi}{7/4+2\cos\varphi}$$

Alors, ou bien on cherche φ et ω_1 est donné, ou bien on cherche ω_1 et φ est donné. Il est évident que pour tout φ il existe un ω_1 pourvu que l'expression ne devienne pas négative, ce qui entraîne ou $\cos\varphi>-\frac{1}{2}$ ou $\cos\varphi<-7/8$

Si maintenant on se donne ω_1 alors :

$$\cos\varphi = \frac{1-\frac{7}{4}\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}}{2\left(\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}-1\right)}$$

et on doit avoir : $-1\leq\cos\varphi\leq 1$

Ceci entraîne soit $\Omega^2>4\omega_1^2$ soit $\Omega^2<\frac{4\omega_1^2}{5}$

On pourrait évidemment pousser l'analyse de diverses façons en supposant $\omega_2=9\omega_1$ donc $\omega=(9+1)\omega_1$ ou 9 nombre donné. On arriverait à des conditions du même type mais par une discussion beaucoup plus longue.

- Supposons enfin que $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ $\theta_2 = 0$ alors $\cos\theta_1 = 0$ $\cos\theta_2 = 1$ $\sin\theta_1 = 1$ $\sin\theta_2 = 0$ $\operatorname{tg}\theta_1 = \infty$ $\operatorname{tg}\theta_2 = 0$

On a alors pour expression des probabilités :

$$V(\kappa^-, \kappa_1^-, \kappa_2^-) = \delta(\omega^- - \omega_1^- - \omega_2^-)\,\delta(\kappa^- - \kappa_1^- - \kappa_2^-)\left(\sigma^{33}_{\kappa^-(\theta)\,\kappa_1^-(\frac{\pi}{2})\,\kappa_2^-(0)}\right)^2 \frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\cos^2\theta - \omega^2)^2} \frac{\omega_1^3\,\omega_2^3}{4\Omega^4\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right)^2} \cdot \left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1} \omega_1\,\omega_2 \qquad (82)$$

$$V(\kappa^-, \kappa_1^+, \kappa_2^-) = \delta(\omega^- - \omega_1^+ - \omega_2^-)\,\delta(\kappa^- - \kappa_1^+ - \kappa_2^-)\left(\sigma^{33}_{\kappa^-(\theta)\,\kappa_1^+,\,\kappa_2^-(0)}\right)^2 \frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\cos^2\theta - \omega^2)^2} \frac{\omega_1^3\,\omega_2^3}{4\Omega^4\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right)^2} \left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1} \omega_1\,\omega_2 \qquad (83)$$

$$V(\kappa^-, \kappa_1^-, \kappa_2^+) = \delta(\omega^- - \omega_1^- - \omega_2^+)\,\delta(\kappa^- - \kappa_1^- - \kappa_2^+)\left(\sigma^{33}_{\kappa^-(\theta)\,\kappa_1^-(\frac{\pi}{2})\,\kappa_2^+(0)}\right)^2 \frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\cos^2\theta - \omega^2)^2} \frac{\omega_1^3\,\omega_2^3}{4\Omega^4} \left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1} \omega_1\,\omega_2 \qquad (84)$$

$$V(\kappa^-, \kappa_1^+, \kappa_2^+) = \delta(\omega^- - \omega_1^+ - \omega_2^+)\,\delta(\kappa^- - \kappa_1^+ - \kappa_2^+)\left(\sigma^{33}_{\kappa^-(\theta)\,\kappa_1^+,\,\kappa_2^+}\right)^2 \frac{\Omega^2\omega^2\sin^4\theta}{(\Omega^2\cos^2\theta - \omega^2)^2} \frac{\omega_1^3\,\omega_2^3}{4\Omega^2} \left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1} \omega_1\,\omega_2 \qquad (85)$$

On voit qu'en principe les probabilités d'interaction ne sont pas nulles et on doit étudier la possibilité de sélection.

Celle-ci s'écrit :

$$(\omega_1+\omega_2)^2 \frac{\left[(\omega_1+\omega_2)^2 - \Omega^2\right]}{(\omega_1+\omega_2)^2 - \Omega^2\cos^2\theta} = (\omega_1 - \Omega^2) + \omega_2^2 + 2\omega_2\sqrt{(\omega_1^2-\Omega^2)^2}\cos\varphi$$

mais $\varphi = (\kappa_1, \kappa_2) = \frac{\pi}{2}$ et donc $\cos\varphi = 0$

par conséquent on doit avoir : $(\omega_1+\omega_2)^2 \frac{\left[(\omega_1+\omega_2)^2 - \Omega^2\right]}{(\omega_1+\omega_2)^2 - \Omega^2\cos^2\theta} = \omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2$

d'où : $(\omega_1+\omega_2)^4 - (\omega_1+\omega_2)^2(\omega_1^2+\omega_2^2) + \Omega^2\cos^2\theta\,(\omega_1^2+\omega_2^2) - \Omega^4\cos^2\theta = 0$

Il est possible de discuter à fond la question de savoir si pour ω_1 et ω_2 donnés il existe un θ vérifiant cette équation. En effet de l'équation on obtient :

$$\cos^2\theta = \frac{(\omega_1+\omega_2)^2(\omega_1^2+\omega_2^2) - (\omega_1+\omega_2)^4}{\Omega^2(\omega_1^2+\omega_2^2) - \Omega^4} < 1$$

ou encore $\frac{2\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)^2}{\Omega^2(\Omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)} > 1$

alors si $\Omega^2 > \omega_1^2+\omega_2^2$ et en posant $\omega_2 = p\omega_1$ on arrive à la condition :

$$p^3 + 2p^2 + p\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{\Omega^4}{2\omega_1^4} + \frac{\Omega^2}{2\omega_1^2} > 0$$

posons $p = x - \frac{2}{3}$ alors on a :

$$x^3 + x\left\{1 + \frac{\Omega^2}{2\omega_1^2} - \frac{4}{3}\right\} - \frac{2}{3}\left(1+\frac{\Omega^2}{2\omega_1^2}\right) - \frac{\Omega^4}{2\omega_1^4} + \frac{\Omega^2}{2\omega_1^2} + \frac{16}{27} > 0$$

(p et x sans dimensions)

d'où : $p = \left(-\frac{a}{2} + \left[\frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}\right]^{1/2}\right)^{1/3} + \left(-\frac{a}{2} - \left[\frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}\right]^{1/2}\right)^{1/3} - \frac{2}{3}$

avec : $a = 1 + \frac{\Omega^2}{2\omega_1^2} - \frac{4}{3}$ $\qquad b = \frac{16}{27} + \frac{\Omega^2}{2\omega_1^2} - \frac{\Omega^4}{2\omega_1^4} - \frac{2}{3}\left(1+\frac{\Omega^2}{2\omega_1^2}\right)$

On voit que l'on arrive à une expression des ω_1 et ω_2 qui avec la condition $\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} > 1+p^2$ donne la possibilité de solution mais qui pour ω_1 et Ω non explicités n'est pas très manipulable. Selon que l'on aura 1 ou 3 racines différentes (avec une racine double parfois) nous aurons différentes zones possibles de variation de ω_2 pour ω_1 donné

Supposons comme cas particulier $\omega_1 = \omega_2$

alors on a : $8\omega_1^4 + 2\omega_1^2\Omega^2\cos^2\theta - \Omega^4\cos^4\theta = 0$

d'où $\cos^2\theta = \frac{8\omega_1^4}{\Omega^4 - 2\omega_1^2\Omega^2}$ et il faut que $0 \leq \frac{8\omega_1^4}{\Omega^2(\Omega^2 - 2\omega_1^2)} \leq 1$

donc $8\omega_1^4 + 2\omega_1^2\Omega^2 - \Omega^4 \leq 0$ et par conséquent $\omega_1^2 \leq 2\Omega^2$

On voit que chaque type d'interactions d'ondes peut être étudié jusqu'au bout en utilisant des méthodes rigoureuses, lorsque le cas s'y prête ou approchées dans les cas défavorables, qui d'ailleurs sont les plus fréquents. Etant donné le nombre considérable de cas pratiques, il est difficile de les traiter en une seule étude, et il est préférable d'ailleurs de le faire en relation avec l'expérience qui seule peut donner une indication sur les cas intéressants ou non. L'étude pratique que nous avons faite se rapportait à l'approximation β_e grand . Or, en fait cette approximation signifie que $\Omega_H >> \Omega_P$ et par conséquent nos résultats peuvent aussi être utilisés en présence d'un champ magnétique peu intense si toutefois la densité du plasma est si faible que l'on ait
Ceci peut être parfois le cas dans certaines zones de l'ionosphère.

Enfin nous pouvons écrire la variation d'énergie due aux phénomènes non linéaires de dislocation et création d'ondes (l'amortissement linéaire étant nul nous négligeons l'amortissement non linéaire). On a alors :

$$S^- \cdot \frac{\partial \langle E^2_{k\omega} \rangle}{\partial t} = \int d\vec{k}_2 \cdot d\vec{k}_1 \; \delta(k-k_1-k_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2) \Big\{ \sigma^{33}_{kk_1k_2} \cdot \Pi^{-1(3)}_{k_2(3)} \sigma^{33}_{k_2-k_1k} (\tau_{k_1}\tau_{-k_1})^{(3)} (\tau_k \tau_{-k})^{(3)} \cdot$$

$$\cdot \langle E^2_{k_1} \rangle \langle E^2_k \rangle + \Big[\sigma^{(33)}_{kk_1k_2} \Pi^{-1(3)}_{-k\,(3)} \sigma^{(33)}_{-k-k_1-k_2} \Big] (\tau_{k_1}\tau_{-k_1})^{(3)} (\tau_{k_2} \cdot \tau_{-k_2})^{(3)} \langle E^2_{k_1} \rangle \langle E^2_{k_2} \rangle +$$

$$+ \Big[\sigma^{(33)}_{kk_1k_2} \Pi^{-1(3)}_{(3)} \sigma^{(33)}_{-k_1-k_2k} \Big] (\tau_{k_1}\tau_{-k_1})^{(3)} (\tau_{k_1} \cdot \tau_{-k_1})^{(3)} \langle E^2_{k_2} \rangle \langle E^2_k \rangle \Big\} \qquad (86)$$

(nous n'avons pas introduit les coefficients $\frac{\omega_1}{s_{k_1}}$, $\frac{\omega_2}{s_{k_2}}$ à l'intérieur de l'équation, étant donné qu'elle a pour but d'étudier l'évolution de $\langle E^2_{k\omega} \rangle$)

Toutes les expressions de cette équation S^-, $\tau^{(3)}$ $\sigma^{(33)}$ $\Pi^{-1(33)}_{k_i(3)}$ ont été calculées et définies précédemment.

CONCLUSION

Nous avons obtenu des équations qui permettent en principe d'étudier, d'une part l'interaction des ondes correspondant aux différents modes possibles définis par les équations de dispersion et, d'autre part l'interaction des ondes et des particules (amortissement non linéaire).

Cette étude a été faite pour le cas d'un plasma non isotrope (champ magnétique). Pour cela, nous avons choisi un modèle de plasma défini par l'équation de Vlasov, complétée par les champs et les courants de particules témoins.

Nous avons ensuite obtenu la fonction de distribution du plasma, ainsi que le courant correspondant et cela jusqu'au second ordre. De même, nous avons calculé le courant de la particule témoin jusqu'au premier ordre. Nous avons pu alors écrire, au moyen des équations de bilan d'énergie, l'évolution dans le temps de la répartition spectrale de la fonction de corrélation spatiale et temporelle des champs électriques. (Cette dernière opération exige certaines précautions mathématiques que nous avons indiquées dans l'introduction).

Notons que d'autres auteurs ont déjà abordé ce type de problème. Le cas que nous avons traité a, simultanément, été étudié dans les travaux [11] . . Mais les auteurs de ces travaux ont conduit leurs calculs et leurs discussions de façon différente de la notre.

Le cas isotrope par contre, avait été étudié d'une façon assez poussée [1, 2, ... 10]
Remarquons, à ce propos, que les conditions de validité physiques des cas isotrope et non isotrope sont les mêmes : on peut résumer ces conditions en disant que l'on doit avoir un plasma dont la densité d'énergie du bruit doit être grande par rapport à sa valeur à l'équilibre thermodynamique, mais inférieure à la densité d'énergie cinétique des particules, que les ondes étudiées sont faiblement amorties ou faiblement croissante, que le modèle de plasma est défini par l'équation de Vlasov et qu'il y a stationnarité des champs électriques par rapport à la variation rapide de ces champs dans le temps.

Nous avons illustré sur l'exemple d'un champ magnétique fort le problème de la sélection des ondes et le calcul des probabilités d'interaction. Ce dernier a été effectué d'une façon suffisamment détaillée pour, le cas échéant, procéder à une vérification expérimentale. Ajoutons, enfin, que les problèmes liés aux théories de l'interaction non linéaire des ondes et de l'amortissement non linéaire ne sont qu'à leur début et présentent une grande variété de possibilité d'études très complexes.

APPENDICE . 1 .

Calcul de l'integrale : $\mathcal{P}\sigma^{33}_{\kappa\kappa_1\kappa_2} = A\int \frac{dv.\, f_0(v)\, v}{(a-v)(b-v)}\left[\frac{-v^2 m}{T} + \frac{v\kappa}{\kappa_2(a-v)} + 1\right] \equiv A.I$

où on a posé : $\kappa_\parallel = \kappa \quad v_\parallel = v \quad \alpha = \frac{m}{2T} \quad \beta = \frac{n}{(2\pi\alpha)^{3/2}} \quad A = \frac{e^3}{Tm}\frac{\beta}{2\alpha\kappa_2\kappa}$

$a = \frac{\omega_2}{\kappa_2} \quad b = \frac{\omega}{\kappa} \quad f_0(v) = e^{-\alpha v^2}$

Nous allons utiliser le fait que :

$$\int \frac{dv\, e^{-\alpha v^2}}{a-v} = \int \frac{dt\, e^{-t^2}}{\gamma - t} = 2\sqrt{\pi}\, e^{-\gamma^2}\int_0^{\gamma} e^{t^2} dt \qquad \text{avec } \gamma = a\sqrt{\alpha}$$

On a pour I la decomposition :

$$I = \frac{1}{b-a}\left[\int \frac{f(v)\left[v - \frac{m}{T}v^3\right]}{a-v} - \int \frac{f(v)\left[v - \frac{m}{T}v^3\right]}{b-v}\right] + \frac{\kappa}{\kappa_2(b-a)^2}\int \frac{v^2 dv f(v)(b-2a+v)}{(a-v)^2} + \frac{\kappa}{\kappa_2(b-a)^2}\int \frac{v^2 f(v) dv}{(b-v)}$$

Chacune des integrales de I nous donne dans l'ordre :

$$\int \frac{f(v)v\left[1 - \frac{m}{T}v^2\right]}{a-v} = -\int f(v)\left[1 - \frac{m}{T}v^2\right] + \int \frac{a f(v)}{a-v} - \frac{ma}{T}\int \frac{f(v)\, v^2}{a-v}$$

$$= -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{m}{T}\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}} + 2a\sqrt{\pi}\, e^{-a^2\alpha}\left(\int_0^{a\sqrt{\alpha}} e^{t^2} dt\right) - \frac{am}{T}\int \frac{f(v)\, av}{a-v}\, dv$$

$$= -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{m}{T}\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}} + 2a\sqrt{\pi}\, e^{-a^2\alpha}\left(\int_0^{a\sqrt{\alpha}} e^{t^2} dt\right) + \frac{a^2 m}{T}\int f(v) dv - \frac{a^3 m}{T}\int \frac{f(v) dv}{a-v}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left(\frac{a^2 m}{T} - 1\right) + \frac{m\sqrt{\pi}}{2T\alpha^{3/2}} + 2\sqrt{\pi}\, a\left(1 - \frac{a^2 m}{T}\right) e^{-a^2\alpha}\left(\int_0^{a\sqrt{\alpha}} e^{t^2} dt\right)$$

la deuxieme intégrale est semblable avec b remplaçant a .

la quatrième intégrale s'ecrit :

$$\int \frac{v^2 dv f(v)}{b-v} = b\int \frac{v dv f(v)}{b-v} = b\left[-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + 2b\sqrt{\pi}\, e^{-b^2\alpha}\left(\int_0^{b\sqrt{\alpha}} e^{t^2} dt\right)\right]$$

Enfin la troisième intégrale s'écrit :

$$\int \frac{v^2 dv f(v)(b-2a+v)}{(a-v)^2} = -\int \frac{v dv f(v)(b-2a+v)}{a-v} + \int \frac{av\, dv f(v)(b-2a+v)}{(a-v)^2}$$

$$= \int dv f(v)(b-2a+v) - 2\int \frac{a\, dv f(v)(b-2a+v)}{(a-v)} + \int \frac{a^2 dv f(v)(b-2a+v)}{(a-v)^2}$$

$$= (b-2a)\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - 2a(b-2a)\int \frac{dv f(v)}{a-v} + 2a\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - 2a^2\int \frac{dv f(v)}{(a-v)} + a^2(b-2a)\int \frac{dv f(v)}{(a-v)^2} - a^2\int \frac{dv f(v)}{a-v} + a^3\int \frac{f(v) dv}{(a-v)^2}$$

$$= b\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + a(a-2b)\int \frac{dv f(v)}{a-v} + a^2(b-a)\int \frac{dv f(v)}{(a-v)^2}$$

or on a : $\int \frac{dv f(v)}{(a-v)^2} = \frac{d}{da}\int \frac{dv f(v)}{(a-v)} = \frac{d}{da}\left(2\sqrt{\pi}\, e^{-a^2\alpha}\int_0^{a\sqrt{\alpha}} e^{t^2} dt\right) = 2\sqrt{\pi}\left(-2a\alpha\, e^{-a^2\alpha}\int_0^{a\sqrt{\alpha}} e^{t^2} dt + 1\right)$

D'où

$$\int \frac{v^2\,dv\,f(v)(b-2a+v)}{(a-v)^2} = b\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + a(a-2b)2\sqrt{\pi}\,e^{-a^2\alpha}\left(\int_0^{a\sqrt{\alpha}} e^{t^2}dt\right) + (a^2b-a^3)\left(-2a\alpha e^{-a^2\alpha}\left(\int_0^{a\sqrt{\alpha}} e^{t^2}dt\right)+1\right)2\sqrt{\pi}$$

$$= b\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + 2\sqrt{\pi}\left(e^{-a^2\alpha}\left(\int_0^{a\sqrt{\alpha}} e^{t^2}dt\right)\right)\left(a^2-2ab-2a^3b\alpha+2a^4\alpha\right)+2\sqrt{\pi}\left(a^2b-a^3\right)$$

En regroupant les quatres intégrales calculées on trouve la formule écrite a la page (72) -

Appendice II .

nous allons brièvement ecrire les dimensions des principales grandeurs utilisées dans le texte.

$E_{\kappa\omega} \sim \frac{eL}{\omega}$ $\quad e^2 \sim mL^3\omega^2$ $\quad f_0, f_1, f_2 \sim \frac{1}{\omega\kappa^3}\,\frac{1}{L^3v^3}$ $\quad J_2 = e\int \vec{v} f_2 d\vec{v}^3 \sim \frac{ev^4}{\omega\kappa^3L^3v^3} = \frac{ev}{\omega}$

$\alpha \sim \frac{1}{v^2}$ $\quad \beta \sim \frac{1}{L^3v^3}$

a la page 31 on a posé $\vec{J}_2 = \int d\kappa_1 d\kappa_2 d\omega_1 d\omega_2\, \delta(\kappa-\kappa_1-\kappa_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\,\sigma_{\kappa\kappa_1\kappa_2} E^2_{\kappa\omega}$

donc $\vec{J}_2 \sim \kappa^3\omega\,\sigma E^2$ et donc $\sigma \sim \frac{ev}{\omega^2\kappa^3E^2} = \frac{v}{\kappa e}$

D'où $\sigma^2 \sim \frac{v^2}{\kappa^2 mL^3\omega^2} \sim \frac{L}{m}$

D'autre part le σ calculé à la page 32 a partir de $\frac{\partial J_2}{\partial E''_{\kappa_1}\partial E''_{\kappa_2}}$ nous donne

$$\sigma \sim \frac{m}{T}\,\frac{e^3}{m^2}\,\frac{v^2}{\omega^2}\,\frac{\beta}{\alpha} \sim \frac{e^3}{m^2}\,\frac{v^2}{\omega^2}\,\beta \sim \frac{e^3}{m\kappa^2\omega^2L^3v}$$

d'où $\sigma^2 \sim \frac{e^6}{m^4\omega^4L^6v^2} \sim \frac{L}{m}$

Enfin le σ^2 calculé à partir de l'equation generale de la page (59) nous donne.

$\frac{\sigma^2}{\omega}\,\kappa^3\omega\langle E^2_{\kappa\omega}\rangle \sim \omega$ or $\langle E^2_{\kappa\omega}\rangle = \frac{\langle E^2_{r,t}\rangle}{\kappa^3\omega} = \frac{e^2}{L^4\kappa^3\omega} = \frac{mL^3\omega^2}{L^4\kappa^3\omega}$

D'où $\quad \frac{\sigma^2}{\omega}\,\frac{mL^3}{L^4}\,\omega^2 \sim \omega$ $\quad$ et enfin $\quad \sigma^2 \sim \frac{L}{m}$

APPENDICE III.

Nous donnons l'expression classique de $\vec{J}_1$ qui permet de connaître $\hat{\sigma}$ et par conséquent l'amortissement linéaire.

$$\vec{J}_1 = e \int dv_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} \left[v_{\perp} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) + v_{\parallel} \vec{k} \right] f_1 \, d\theta$$

où f_1 est donné à la page (22). Pour intégrer en θ on utilise $e^{\frac{i}{\Omega} k_{\perp} v_{\perp} \sin(\theta-\varphi)} = \sum_p J_p \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) e^{ip(\theta-\varphi)}$

En introduisant ce développement dans l'expression de f_1 on trouve :

$$\vec{J}_1 = \frac{2\alpha i e^2}{m} \int dv_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} \left[v_{\perp} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) + v_{\parallel} \vec{k} \right] f_0 \sum_p \sum_n J_p \cdot e^{ip(\theta-\varphi)} \frac{e^{-in(\theta-\varphi)}}{X_n} \Big\{$$

$$\cdot J_n v_{\parallel} E_{\parallel} + \left[\frac{n\Omega}{k_{\perp} v_{\perp}} J_n \cos(\varphi-\varepsilon) - J_n' i \sin(\varphi-\varepsilon) \right] v_{\perp} E_{\perp} \Big\}$$

D'où en utilisant les formules : $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ et $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$
on trouve

$$\vec{J}_1 = \frac{2\alpha i e^2}{m} \int dv_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} \sum_{p,n} e^{i(p-n)(\theta-\varphi)} f_0 \Big\{ \left[\frac{v_{\perp}}{2} (J_{p-1} e^{i\varphi} + J_{p+1} e^{-i\varphi}) \vec{i} + \frac{v_{\perp}}{2i} (J_{p-1} e^{i\varphi} - J_{p+1} e^{-i\varphi}) \vec{j} + \right.$$

$$\left. + v_{\parallel} J_p \vec{k} \right] \frac{1}{X_n} \Big\{ J_n v_{\parallel} E_{\parallel} + \left[\frac{n\Omega}{k_{\perp} v_{\perp}} J_n \cos(\varphi-\varepsilon) - J_n' i \sin(\varphi-\varepsilon) \right] v_{\perp} E_{\perp} \Big\}$$

Si on intègre, on trouve la solution p = n. D'où l'expression de :

$$J_1 = \frac{2\alpha i e^2}{m} \int dv_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \, f_0(v_{\perp}) f_0(v_{\parallel}) \sum_n \left[\frac{v_{\perp}}{2} (J_{n-1} e^{i\varphi} + J_{n+1} e^{-i\varphi}) \vec{i} + \frac{v_{\perp}}{2i} (J_{n-1} e^{i\varphi} - J_{n+1} e^{-i\varphi}) \vec{j} + \right.$$

$$\left. + v_{\parallel} J_n \vec{k} \right] \frac{1}{X_n} \Big\{ J_n v_{\parallel} E_{\parallel} + \left[\frac{n\Omega}{k_{\perp} v_{\perp}} J_n \cos\varphi - J_n' i \sin\varphi \right] v_{\perp} E_x + \left[\frac{n\Omega}{k_{\perp} v_{\perp}} J_n \sin\varphi + J_n' i \cos\varphi \right] v_{\perp} E_y \Big\}$$

Cette expression a bien la forme opératorielle $\vec{J}_1 = \hat{\sigma} . \vec{E}$.
Si on fait tendre $\Omega \to \infty$, $\vec{J}_1$ devient alors :

$$J_1 = \frac{2\alpha i e^2}{m} \int dv_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \, f_0(v_{\perp}) f_0(v_{\parallel}) \, \frac{v_{\parallel}^2 J_0^2 E_{\parallel} \vec{k}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}$$

et

$$\sigma' = R_e \sigma = \frac{2\alpha i e^2}{m} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{\omega}{k_{\parallel}} \left[-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + 2 \frac{\omega}{k_{\parallel}} \sqrt{\pi} \, e^{-\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2}\alpha} \left(\int_0^{\frac{\omega}{k_{\parallel}}\sqrt{\alpha}} e^{t^2} dt \right) \right]$$

On voit que $\sigma' \sim \frac{\omega}{k_{\parallel}^2}$

APPENDICE IV.

Nous allons justifier plus en détail la méthode d'itération que nous avons utilisée et dont nous avons parlé à la page 11. Nous allons faire cette justification en absence des termes $\vec{v}\wedge\vec{B}$ et $\vec{v}\wedge\vec{B}_0$

Soit l'équation $\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}.\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + e\vec{E}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad (1)$

si on pose $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \dots$ et $E = \varepsilon E_0 + \varepsilon^2 E_1 + \dots$ et $\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial \vec{r}} = 0$

on trouve $\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}.\frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} + e\vec{E}_0.\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad (2)$

Si par contre, on prend la transformée de Fourier et l'intégrale formelle de (1) on trouve :

$$f = \frac{i}{\omega - \vec{k}\vec{v}} \int \vec{E}(f, k_1, \omega_1).\frac{\partial f(k_2)}{\partial \vec{v}}\, dk_1 dk_2 d\omega_1 d\omega_2\, \delta(k-k_1-k_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2) \qquad (3)$$

Remarquons que ceci montre que la solution vraie de l'équation de Vlassov contient toujours une corrélation non linéaire qui implique $\omega = \omega_1+\omega_2$ et $\vec{k} = \vec{k_1} + \vec{k_2}$

La solution (3) est du type $f_{k\omega} = A\left(E_{k\omega}(f), f_{k\omega}\right)$ où A est un opérateur intégral.

D'autre part les équations de Maxwell nous donnent :

$$\left(k^2\delta_{ij} - k_i k_j\right)E_j = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\left(J_{1i} + \varepsilon J_{2i} + \dots\right)$$

D'où au premier ordre on a : $\left(k^2\delta_{ij} - k_ik_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right)E_j^{\circ} = 0$ car $\vec{J_1} = e\int \vec{v}.f_1\, d^3\vec{v} = \hat{\sigma}.\vec{E}$ et $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 8\bar{v}^2\sigma_{ij}.\delta_{\omega}(\omega)$

Au deuxième ordre on a . $\left(k^2\delta_{ij} - k_ik_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right)E_j^{(1)} = \frac{4\pi i\omega}{c^2}J_{2i}(E_0)$ etc...

Ecrivons que : $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \dots$ sans développer E, alors : $f_{k\omega}^{(1)} = A\left(E_k(f).f_{k\omega}^{\circ}\right)$

Si maintenant on itère E on a : $f_{k\omega}^{(1)} = A\left(E_{k\omega}^{\circ}(f_1), f_{k\omega}^{\circ}\right) = \frac{i}{\omega-\vec{k}\vec{v}}\int \vec{E}_{k,\omega_1}^{\circ}.\frac{\partial f_{k_2}^{\circ}}{\partial \vec{v}}\, dk_1 dk_2\, \delta(k-k_1-k_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)$

Ceci n'est rien d'autre que la solution obtenue directement à partir de (2).

APPENDICE V.

Bien que l'étude des interactions d'ondes strictement longitudinales obliques par rapport au champ magnétique est exclue du fait que ces ondes sont amorties (puisque $K_{\parallel} \to \infty$) on peut néanmoins voir ce qui peut se produire au voisinage de ce cas asymptotique.

On doit alors avoir : $\eta_0^2\theta_1 = \frac{\Omega^2-\omega^2}{\omega_1^2}$ $\eta^2\theta_2 = \frac{\Omega^2-\omega^2}{\omega_2^2}$ $\eta^2\theta = \frac{\Omega^2-\omega^2}{\omega^2}$ $\omega = \omega_1+\omega_2$

donc $\eta^2\theta = \frac{\Omega^2-(\omega_1+\omega_2)^2}{(\omega_1+\omega_2)^2}$ ou enfin : $(\omega_1+\omega_2)^2 = \Omega^2\cos^2\theta$ $\omega_1^2 = \Omega^2\cos^2\theta_1$ $\omega_2^2 = \Omega^2\cos^2\theta_2$

On arrive à la condition $\Omega^2\cos^2\theta_1 + \Omega^2\cos^2\theta_2 + 2\Omega^2\cos\theta_1\cos\theta_2 = \Omega^2\cos^2\theta$

c'est-à-dire $(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2 = \cos^2\theta$ ce qui donne $\cos\theta_1+\cos\theta_2 = \cos\theta$

et on obtient de même en faisant la sélection $(\omega_1-\omega_2) = \omega$ $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = \cos\theta$

avec $\omega, \omega_1, \omega_2 < \Omega$

Mais comme $\eta_1^2, \eta_2^2, \eta^2 \to \infty$ et que $\sigma^{33}_{k k_1 k_2} \to 0$ on en déduit qu'il est difficile de savoir si la solution est possible (c'est-à-dire si on peut avoir $\vec{K} = \vec{K_1} + \vec{K_2}$) et que l'expérience pourrait faire apparaître une interaction faible non linéaire d'ondes obliques " quasi-longitudinale ".

/1/ a) DANILKIN (I.S.) , KOVRIJNIKH (L.M.) , RAIZER (M.D.) , TSITOVITCH (V.N.)
Sur certains effets non-linéaires dans un plasma sans collisions et possibilités d'application .

b) TSITOVICH (V.N.) - Accélération statistique des particules d'un plasma .

c) KOVRIJNIKH (L.M.) - Théorie de l'intéraction non-linéaire des ondes dans un plasma .

Travaux de l'institut Lebedev , 1966 tome 32 .

/2/ GAILITIS (A.) , TSITOVITCH (V.N.) , Z.E.T.F. vol 46 , 1964 p. 1726

/3/ KOVRIJNIKH (L.M.) , TSITOVITCH(V.N.) , Z.E.T.F., vol.46 , 1964 p. 2212

/4/ GAILITIS (A.) , TSITOVITCH (V.N.) , Z.E.T.F. , vol.47 n° 10 , 1964 p. 1468

/5/ KOVRIJNIKH (L.M.) , TSITOVITCH (V.N.) , D.A.N., C.C.C.P. , vol.158 , 1964 p. 1306

/6/ KARPMAN (V.I.) , P.M.T.Ø , n°1, 1964, p.45
D.A.N., C.C.C.P. , vol.152 , 1963, p. 587

/7/ KARPMAN (V.I.) , ALTCHOUL (L.M.) , Z.E.T.F. vol.47 , n° 10 , 1964,p. 1595

/8/ SILIN (V.P.) , P.M.T.Ø , n° 1 , 1964 ,p. 31

/9/ GORBOUNOV (L.M.) , SILIN (V.P.) , Z.E.T.F. vol. 47 n° 7 , 1964, p.200

/10/ GORBOUNOV (L.M.) , POUSTOVALOV (V.E.) , SILIN (V.P.), Z.E.T.F. vol.47 n° 10,1964 p.1437

/11/ KROPOTKINE (A.P.) , POUSTOVALOV (V.V.) ,
Interaction non-linéaire d'ondes dans un plasma anisotrope -Rapport interne de l'Institut Lebedev, 1965.

/12/ ANDREEWSKY (A.)
a) Equation cinétique non-linéaire pour les ondes et les particules d'un plasma non isotrope homogène
Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, vol.262 , 1966, pp. 19-22 .

b) Déduction d'une équation cinétique non-linéaire pour les ondes et les particules d'un plasma non isotrope homogène, Rapport EUR-CEA-FC-320 , 1965 .

/13/ LAVAL (G.) , PELLAT (R.)
Théorie cinétique des effects collectifs dans un plasma , Rapport EUR-CEA-FC-316 .

/14/ LAFLEUR (S.) , LAFLEUR (Ch.)
Déduction d'une équation cinétique pour des plasmas stables ou faiblement instables - Rapport CEA-R-2527 , 1964 .

Déduction de l'équation cinétique adaptée à l'étude des propriétés d'un plasma -
Rapport EUR-CEA-FC-228 , 1963 .

/15/ VEDENOV
J. Nuclear Energy part C , vol.5 , 1963 p. 169

/16/ ETIEVANT (C.) , FIDONE (I.) , PERULLI (M.)
Processus non-linéaires dans les systèmes faisceaux-plasma - Rapport EUR-CEA-FC-390 , 1966

/17/ KADOMTSEV (B.B.) , Plasma turbulence , Academic Press , London , 1965 .

/18/ AAMODT (R.E.) , DRUMMOND (W.E.) , Phys. Fluids vol 7 , 1964 p. 1816 .
Phys. Fluids , vol 8 , 1964

/19/ AKHIEZER (I.A.) , DANELIYA (I.A.) , ISINTSADZE (N.L.) , Soviet Physics J.E.T.P.vol 19 n° 1
1964 , p. 208 .

/20/ ALLIS (P.) , BUCHSBAUM (J.J.) , BERS (A.) , Waves in Anisotropic Plasmas, M.I.T. Press, 1963 .

/21/ CANO (R.) , ETIEVANT (C.) , FIDONE (I.) , MATTIOLI (M.) , OLIVAIN (J.), PERULLI (M.)
Etudes des bandes permises pour la génération d'ondes par effets non-linéaires dans un plasma .
Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, vol.263 , 1966 ,pp.439-442

/22/ ETIEVANT (C.) , FIDONE (I.) , LAVAL (G.) , OLIVAIN (J.) , PELLAT (R.) , PERULLI (M.)
Processus non-linéaires dans un plasma fini ., Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, vol.263 , 1966 ,pp.19-21 .